CLUBUL MATEMATICIENILOR

Marian ANDRONACHE • Dinu ŞERBĂNESCU
Marius PERIANU • Cătălin CIUPALĂ • Florian DUMITREL



Matematică
pentru examenul de bacalaureat

Filiera teoretică, **profilul real**, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, **profilul militar**, specializarea matematică-informatică

Matematică pentru bacalaureat

ISBN 978-973-124-824-0



Marian ANDRONACHE • Dinu ŞERBĂNESCU
Marius PERIANU • Cătălin CIUPALĂ • Florian DUMITREL

Matematică

pentru examenul de bacalaureat

M1

CLUBUL MATEMATICIENILOR

Clubul matematicienilor este un proiect dezvoltat de Grupul Editorial Art.

Copyright © 2012



Toate drepturile asupra acestei lucrări aparţin editurii.
Reproducerea integrală sau parţială a conţinutului lucrării
este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii.

Referenţi ştiinţifici:
prof. drd. Livia Harabagiu
prof. gr. I. Eduard Buzdugan

Tehnoredactare:
Cornel Drăghia

Coperta:
Alexandru Daş

Tipărit la C.N.I. „Coresi" S.A.

Descrierea CIP este disponibilă la Biblioteca Naţională a României

978-973-124-824-0

Pentru **comenzi** vă puteţi adresa:

Departamentului Difuzare
C.P. 22, O.P. 84, Cod: 062650, sector 6, Bucureşti

telefon
021.224.17.65
0721.213.576
0744.300.870
Se acordă importante **reduceri**.

Cuprins

	Enunţuri	Soluţii
Partea 1. ALGEBRĂ/GEOMETRIE (clasele IX-X)		
Tema 1.1 – Mulţimi de numere. Mulţimi şi elemente de logică matematică	7	196
Tema 1.2 – Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale (şiruri)	10	197
Tema 1.3 – Funcţii. Proprietăţi generale. Lecturi grafice	14	200
Tema 1.4 – Funcţia de gradul I. Funcţia de gradul al II-lea	19	201
Tema 1.5 – Puteri şi radicali. Ecuaţii iraţionale	24	204
Tema 1.6 – Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică. Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale şi logaritmice	28	207
Tema 1.7 – Numere complexe	32	208
Tema 1.8 – Metode de numărare. Elemente de combinatorică. Matematici financiare	36	209
Tema 1.9 – Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică	40	210
Tema 1.10 – Trigonometrie. Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar în geometria plană	46	213
Partea 2. ALGEBRĂ (clasele XI-XII)		
Tema 2.1– Permutări. Matrice. Determinanţi	55	216
Tema 2.2 – Sisteme de ecuaţii liniare	64	219

Tema 2.3 – Structuri algebrice 74 226

Tema 2.4 – Polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ 85 235

Partea 3. ANALIZĂ MATEMATICĂ (clasele XI-XII)

Tema 3.1 – Limite de şiruri. Limite de funcţii. Funcţii continue. Funcţii derivabile 97 239

Tema 3.2 – Primitive 118 254

Tema 3.3 – Funcţii integrabile 124 258

Partea 4. VARIANTE DE SUBIECTE

Tema 4.1 – Subiecte date la examenul de bacalaureat în anii anteriori 143 280

Tema 4.2 – Variante de subiecte propuse spre rezolvare 156 304

Algebră/Geometrie 1

Clasele IX-X

Tema 1.1. Mulţimi de numere. Mulţimi şi elemente de logică matematică (clasa a IX-a)

Tema 1.2. Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale (şiruri) (clasa a IX-a)

Tema 1.3. Funcţii. Proprietăţi generale. Lecturi grafice (clasele IX-X)

Tema 1.4. Funcţia de gradul I. Funcţia de gradul al II-lea (clasa a IX-a)

Tema 1.5. Puteri şi radicali. Ecuaţii iraţionale (clasa a X-a)

Tema 1.6. Exponenţiale şi logaritmi (clasa a X-a)

Tema 1.7. Numere complexe (clasa a X-a)

Tema 1.8. Metode de numărare. Elemente de combinatorică (clasa a X-a)

Tema 1.9. Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică (clasele IX-X)

Tema 1.10. Elemente de trigonometrie. Funcţii şi ecuaţii trigonometrice (clasa a X-a)

Tema 1.1

Mulțimi de numere.
Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât x se numește *partea întreagă* a lui x. Se notează: $[x] = \max\{p \in \mathbb{Z} \mid p \le x\}$.

Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numește *partea fracționară* a lui x.

Proprietăți

1. $[x] \le x < [x]+1, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $x-1 < [x] \le x, \forall x \in \mathbb{R}$;
3. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
4. $[x+n] = [x]+n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$;

1. $\{x\} \in [0,1), \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
3. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$,
4. $\{x+n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

Identitatea lui Hermite.

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx], \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Probleme propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții

a) p : „$[x]+[y]=[x+y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$", unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) q : „$\{3x\}=3\{x\}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$", unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

c) r : „$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2=2012$".

2. Determinați valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional."

Variante bacalaureat 2009

3. *a)* Calculați $\left[\sqrt{2012}\right]+\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left\{-\sqrt{2}\right\}$.

b) Calculați $\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right]$.

c) Calculați $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

d) Calculați $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{100}\right]$.

e) Calculați $\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2\right]$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

4. *a)* Determinați mulțimea $A=\{x\in[0,2]\mid[2x]=2[x]\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Determinați mulțimea $B=\{x\in[-1,2]\mid 3\{x\}=1\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

5. Arătați că $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

6. Fie $x\in\mathbb{R}^*$. Arătați că $\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$ dacă și numai dacă $x>1$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

7. *a)* Arătați că $\{\{x\}+y\}=\{x+\{y\}\}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\{\{x+y\}+z\}=\{x+\{y+z\}\}$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Variante bacalaureat 2009, enunț adaptat

8. *a)* Arătați că $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că dacă $[x+a]=[x+b]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci $a=b$.

9. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\{x\in\mathbb{R}\mid (m^2-1)x+2>0\}=\mathbb{R}$.

10. Determinați cel mai mic element al mulțimii $\{x\in\mathbb{R}\mid(x+2)(x^2-4)\ge 0\}$.

11. Se consideră $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid (x-1)\left(x-\dfrac{10}{3}\right)\le 0\right\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii $B=\{|a-b|\mid a,b\in\mathbb{Z},\ a<b,\ [a,b]\subset A\}$.

12. Determinați numerele naturale din mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<x\le 2\right\}$.

13. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|<2\}$ și $B=[-3,0)$. Determinați $A\cap B\cap\mathbb{Z}$.

14. Se consideră mulțimile $A=\{0,2,4,6,...,50\}$ și $B=\{0,3,6,9,...,48\}$. Aflați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile A, B, $A\cap B$ și $A\cup B$.

15. Se consideră fracția zecimală infinită $\dfrac{1}{7}=0,a_1a_2...$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$.

16. Se consideră fracția zecimală infinită $\dfrac{4}{11}=a_0,a_1a_2...$. Determinați suma elementelor mulțimii $A=\{a_0,a_1,a_2,...\}$.

17. Se consideră fracția zecimală infinită $\dfrac{10}{13}=0,a_1a_2a_3...$. Calculați $a_1+a_2+...+a_{2012}$.

Variante bacalaureat, februarie 2008, enunț adaptat

18. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+4=0\}$.

19. Determinați perechile $(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+n=0\}$.

20. Determinați $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-ax+4=0\}\cap\{0,1,2,...,2011\}\ne\varnothing$.

21. Se consideră mulțimea $A=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că numerele $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ și $\{\sqrt{3}\}$ aparțin mulțimii A.

b) Arătați că $x\cdot y\in A$, pentru orice $x,y\in A$.

c) Arătați că mulțimea $B=\{x\in A\mid [x]=0\}$ are cel puțin 2012 elemente.

22. Arătați că $\sqrt{3}\notin\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

23. Determinați $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $x^2+2xy+2y^2=0$.

24. Arătați că $x^2+3xy+4y^2\ge 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Variante bacalaureat 2009

25. Determinați $x+y+z$ știind că $x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z+14=0$.

26. *a)* Arătați că dacă $x,y,z\in\mathbb{R}$ și $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$, atunci $x=y=z$.

b) Determinați mulțimea $\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid a^2+b^2+4=ab+2a+2b\}$.

27. *a)* Arătați că $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2,\ \forall a,b>0$.

b) Arătați că $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc,\ \forall a,bc\ge 0$.

28. Se consideră numerele $x,y\ge 1$.

a) Arătați că $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\le\dfrac{1}{2}$.

b) Arătați că $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$.

29. Determinați mulțimea $\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid \sqrt{a}+\sqrt[4]{b}=2\}$.

30. Dați un exemplu de două numere naturale a și b care îndeplinesc condiția $\sqrt{a}-\log_3 b\in\mathbb{N}^*$.

31. Dați un exemplu de două numere iraționale a și b care îndeplinesc condițiile $a+b\in\mathbb{N}^*$ și $a\cdot b\in\mathbb{Z}$.

32. Determinați un element $(a,b,c)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ care verifică condiția $2^a<b<\log_3 c$.

33. Ordonați crescător numerele.

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \ln 2$; *b)* $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[6]{6}$;

c) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ \sqrt{5}$; *d)* $\dfrac{1}{2},\ \log_3 2,\ \ln 2,\ \sqrt{3},\ 1$.

Tema 1.2

Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale (şiruri)

1. Şiruri

Definiţie. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ este *monoton (strict) crescător* dacă $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$, $\forall n \ge 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ este *monoton (strict) descrescător* dacă $x_n \ge x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, $\forall n \ge 1$.

Definiţie. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ este *mărginit inferior* dacă există un număr real (notat cu) m astfel încât $m \le x_n$, $\forall n \ge 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ este *mărginit superior* dacă există un număr real (notat cu) M astfel încât $x_n \le M$, $\forall n \ge 1$.

Dacă şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit atât inferior cât şi superior, spunem că şirul este *mărginit.*

2. Progresii aritmetice

Definiţie. Şirul de numere reale $(a_n)_{n\ge1}$ este o *progresie aritmetică de raţie r* dacă $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \ge 1$ (adică diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este constantă).

Proprietăţi

1. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $\forall n \ge 1$. **2.** $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $\forall n \ge 2$.

3. $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + r\dfrac{n(n-1)}{2}$, $\forall n \ge 1$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

4. $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$, $\forall n \ge 1$, $r \ne 0$.

3. Progresii geometrice

Definiţie. Şirul de numere reale nenule $(b_n)_{n\ge1}$ este o *progresie geometrică de raţie q* dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (adică raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant).

Proprietăţi

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \ge 1$

2. $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $\forall n \ge 2$.

3. $S_n = \begin{cases} b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}, & q \ne 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Probleme propuse

1. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ cu termenul general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$ este crescător.
Variante bacalaureat 2009

2. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$ este strict monoton.
Variante bacalaureat 2009

3. Arătaţi că şirurile următoare sunt monotone.

a) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$, $\forall n \ge 1$

b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \ge 1$.

c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$, $\forall n \ge 1$.

4. Arătaţi că şirurile următoare sunt mărginite.

a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $\forall n \ge 1$.

b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $\forall n \ge 1$.

c) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1}$, $\forall n \ge 1$.

5. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge0}$ astfel încât $a_5 = 7$ şi $a_{23} = 43$.

a) Determinaţi a_{13}.

b) Stabiliţi dacă numărul 2015 este termen al progresiei?

c) Calculaţi suma $T = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots + a_{2012}$.

6. Calculaţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, ştiind că $a_4 - a_2 = 4$ şi $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$. *Variante bacalaureat 2009*

7. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ ştiind că x, $(x-1)^2$ şi $x+2$ sunt în progresie aritmetică.

8. Determinaţi numărul real x ştiind că numerele $x+1$, $1-x$ şi 4 sunt în progresie aritmetică.

9. Aflaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care numerele 2^{a-1}, $2^{-a+2}+1$, $2^{a+1}+1$ sunt în progresie aritmetică.
Variante bacalaureat 2009

10. Calculaţi sumele.

a) $1+4+7+\ldots+100$; *b)* $2+6+10+\ldots+2010$;

c) $1+3+5+\ldots+(2n+3)$, $n \in \mathbb{N}^*$; *d)* $1+5+9+\ldots+(4n-3)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Arătaţi că suma primelor n numere naturale impare este un pătrat perfect.

12. Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge1}$. Ştiind că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 + n$, demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este o progresie aritmetică.

13. Determinați numărul natural x din egalitățile:

a) $1+5+9+...+x=231$.

b) $1+3+5+...+x=225$.

c) $x+(x+1)+...+(x+x)=45$.

d) $2+5+8+...+x=57$.

Variante bacalaureat 2009

14. Determinați al zecelea termen al șirului $x_1, x_2, 7, 10, 13, ...$.

15. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3+a_{19}=10$, calculați a_6+a_{16}.

Variante bacalaureat 2009

16. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_2+a_3+a_{19}+a_{20}=8$. Calculați.

a) $a_1+a_2+...+a_{21}$; *b)* $a_2+a_4+...+a_{20}$.

17. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ și S_n suma primilor n termeni ai progresiei.

a) Dacă $a_1+a_4=100$, $a_{n-3}+a_n=200$ și $S_n=600$, determinați n.

b) Dacă $S_{3n}=9S_n$ și $a_4=21$, calculați a_1.

18. Arătați că dacă numerele reale a, b și c sunt în progresie aritmetică și progresie geometrică, atunci $a=b=c$.

19. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ știind că numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică și $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică. *Variante bacalaureat 2009*

20. Fie a, b, c numere naturale în progresie geometrică. Știind că $a+b+c$ este un număr par, arătați că numerele a, b, c sunt pare. *Variante bacalaureat 2009*

21. Determinați $x>0$ știind că numerele $1, x-1, x+5$ sunt în progresie geometrică.

22. Fie ecuația $x^2-4x+a=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a\in\mathbb{R}^*$ știind că $x_1, x_2, 3x_2$ sunt în progresie geometrică.

23. Fie ecuația $x^2+ax+2=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că x_1, x_2, x_2^2 sunt în progresie geometrică.

24. Determinați primul termen al șirului $a_0, a_1, a_2, 4, 8, 16, 32, ...$.

25. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, ...$.

Variante bacalaureat 2009

26. Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}$. Arătați că $s\in(1;\ 2)$.

27. Arătați că $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{2012}}>\frac{2}{3}$.

28. Fie $a=1+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{5^{10}}$ și $b=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+...-\frac{1}{5^{11}}$. Calculați $[a]+[b]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

29. Arătați că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este adevărată egalitatea

$$\left(1+x+x^2+...+x^{11}\right)^2-x^{11}=\left(1+x+x^2+...+x^{10}\right)\left(1+x+...+x^{12}\right).$$

30. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=6$ și $b_3+b_4=24$.

Examen Bacalaureat 2011

31. Se consideră progresia geometrică cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 0}$ și $S_n=b_0+b_1+...+b_n$, astfel încât $b_4-b_0=15$ și $b_2+b_0=5$.

a) Determinați b_2. *b)* Calculați S_8.

32. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu elemente numere naturale. Arătați că rația progresiei este un număr natural.

33. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu toate elementele numere naturale. Arătați că rația progresiei este un număr natural.

34. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3=6$ și $b_5=24$, determinați termenul b_7. *Model subiect MECTS, Bacalaureat 2011*

35. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$. Calculați suma

$f(2)+f(2^2)+...+f(2^9)$.

36. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$. Calculați sumele:

$S_1=f\left((-3)^0\right)+f\left((-3)^1\right)+f\left((-3)^2\right)+...+f\left((-3)^{10}\right)$

$S_2=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(11)$.

37. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-1$. Calculați sumele

$S_1=f(0)-f(1)+f(2)-f(3)+...+f(50)$, $S_2=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(50)$ și

$S_3=f(2^0)-f(2^1)+f(2^2)-f(2^3)+...+f(2^9)$.

Tema 1.3

Funcţii. Proprietăţi generale. Lecturi grafice

Fie A şi B două mulţimi nevide. Spunem că $f: A \to B$ este o *funcţie* dacă fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un unic element $f(x) \in B$.

A se numeşte *domeniul funcţiei f*, iar B se numeşte *codomeniul funcţiei f*. Două funcţii sunt egale dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi aceeaşi lege de definiţie.

Graficul funcţiei $f: A \to B$ este mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$.

Imaginea funcţiei $f: A \to B$ sau (*mulţimea valorilor funcţiei f*) este mulţimea

$$\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Observaţii. 1. $M(u,v) \in G_f \Leftrightarrow f(u) = v$.

2. Funcţia identică a mulţimii A este $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

1. Operaţii cu funcţii

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$. Atunci:

- *suma* funcţiilor f şi g este funcţia $f + g : D \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *produsul* funcţiilor f şi g este funcţia $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- dacă $g(x) \neq 0, \forall x \in D$, *câtul* funcţiilor f şi g este funcţia $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Compunerea funcţiilor. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Funcţia $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$, se numeşte *compunerea* funcţiilor g şi f.

Observaţie. Compunerea funcţiilor este asociativă, dar nu este comutativă.

2. Monotonia funcţiilor

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *monoton (strict) crescătoare* dacă pentru orice $x, y \in D$, $x < y$, avem $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$).

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *monoton (strict) descrescătoare* dacă $x, y \in D$, $x < y$, avem $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

Observaţii.

1. Dacă raportul de variaţie $R_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$, $\forall x, y \in D$, $x \neq y$, atunci funcţia f este strict crescătoare, iar dacă $R_f(x,y) < 0$, $\forall x \neq y$, atunci f este descrescătoare.

2. Compunerea a două funcţii monotone, de aceeaşi monotonie, este o funcţie crescătoare; compunerea a două funcţii monotone, de monotonii diferite, este o funcţie descrescătoare.

3. Funcţii pare, impare, periodice.

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă centrată în origine ($\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$).

a. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *funcţie pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

b. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *funcţie impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Proprietăţi

1. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie impară şi $0 \in D$, atunci $f(0) = 0 \Leftrightarrow O(0,0) \in G_f$.

2. Suma $f + g : D \to \mathbb{R}$ a două funcţii pare (impare) $f, g : D \to \mathbb{R}$ este tot o funcţie pară (impară).

3. Produsul/câtul a două funcţii pare/impare este o funcţie pară. Produsul/câtul dintre o funcţie pară şi una impară este o funcţie impară.

4. Compuncrea a două funcţii pare/impare este o funcţie pară. Compunerea dintre o funcţie pară şi una impară este o funcţie impară.

Definiţie. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *periodică cu perioada T* dacă $f(x+T) = f(x)$, pentru orice $x \in D$ pentru care $x + T \in D$. Cea mai mică perioadă pozitivă (dacă există) se numeşte *perioadă principală*.

4. Simetrii ale graficului unei funcţii

Definiţie. Dreapta $x = a$ este *axă de simetrie* pentru graficul funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ dacă $f(a-x) = f(a+x)$, pentru orice $x \in D$ astfel încât $a - x, a + x \in D$.

Punctul $M(a,b) \in xOy$ este *centru de simetrie* pentru graficul funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ dacă $f(a-x) + f(a+x) = 2b$, pentru orice $x \in D$ astfel încât $a - x, a + x \in D$.

Observaţii. 1. Graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa Oy.

2. Graficul unei funcţii impare este simetric faţă de origine.

5. Funcţii injective, surjective, bijective, inversabile

Definiţie. Funcţia $f : A \to B$ este:

- *injectivă* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *surjectivă* dacă pentru orice $y \in B$, există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$;
- *bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă.

Definiţie. Funcţia $f : A \to B$ este inversabilă dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Notăm $g = f^{-1}$ şi spunem că f^{-1} este inversa funcţiei f.

Observaţii

1. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă este îndeplinită una din condiţiile:

a. Pentru orice $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $x_1 = x_2$.

b. Pentru orice $y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie $x \in A$.

2. Funcţia $f : A \to B$ e surjectivă dacă şi numai dacă este îndeplinită una din condiţiile:

a. $\operatorname{Im} f = B$.

b. Pentru orice $y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie $x \in A$.

3. Funcţia $f : A \to B$ este bijectivă dacă oricărui element $y \in B$ îi corespunde un unic element $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

4. Funcția $f: A \to B$ este *inversabilă* dacă și numai dacă este *bijectivă*. *Inversa* funcției bijective $f: A \to B$ este funcția $f^{-1}: B \to A$ care îndeplinește proprietatea: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, unde $x \in A$ și $y \in B$.

Probleme propuse

1. Arătați că $\frac{1}{2}$ **nu** este perioadă pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\} + \{2x\}$.

2. Arătați că $\frac{1}{3}$ este perioadă pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{3x\}$.

3. Determinați câte o perioadă pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\} + \{x\}$; *b)* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{3}\right\}$.

4. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1 - a^2)x + 4$ este constantă.

Bacalaureat 2011

5. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ este constantă.

Variante bacalaureat 2009

6. Arătați că funcția $f: [3,8] \to \mathbb{R}, f(x) = |x - 8| + |3 - x|$ este constantă.

7. Arătați că funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \left[\frac{x}{x^2 + 1}\right]$ este constantă, unde $[a]$ este partea întreagă a lui a.

8. Arătați că funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x - 1}$ este strict descrescătoare.

9. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + a$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că $f \circ g = g \circ f$.

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$. Arătați că funcția $f \circ f \circ f$ este strict descrescătoare. *Variante bacalaureat 2009*

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - x$. Calculați $(f \circ f)(0)$.

Examen Bacalaureat, iunie 2006

12. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + 1$ se intersectează într-un punct pe axa Ox.

13. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x + 2$ determinați cel mai mare element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le 2\}$.

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 8x$. Determinați suma elementelor din mulțimea $A = \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = a\}$.

15. Arătați că imaginea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ este intervalul $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

16. Determinați mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$.

Examen Bacalaureat, septembrie 2010

17. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$. Determinați imaginile funcțiilor $f \circ g$ și $g \circ f$.

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ și $\operatorname{Im} f$ imaginea funcției *f*.

a) Arătați că $1 \notin \operatorname{Im} f$.

b) Arătați că cea mai mare valoare a funcției *f* este $\frac{1}{2}$.

c) Arătați că $-\frac{1}{2} \in \operatorname{Im} f$.

19. Arătați că minimul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^2$ este egal cu -1.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$. Pentru o submulțime A a lui $\mathbb{R}$ definim mulțimea $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$. Determinați:

a) $f^{-1}(\{0,2\})$; *b)* $f^{-1}((3, +\infty))$; *c)* $f^{-1}([3,8])$;

d) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care mulțimea $f^{-1}(\{m\})$ are un singur element.

21. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ știind că punctele $A(1,0)$ și $B(0,-1)$ aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + mx + n$.

22. Arătați că următoarele funcții sunt impare:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$; *b)* $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; *d)* $f: (-3,3) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\frac{3 - x}{3 + x}\right)$.

Examen Bacalaureat, 2009, 2010

23. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(e^x + e^{-x}) + a$ este impară.

24. Determinați $a + b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ este funcție pară.

25. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție pară. Arătați că *f* **nu** este injectivă.

26. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție impară. Arătați că originea axelor de coordonate aparține graficului funcției *f*.

27. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$.

28. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Arătați că $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-ori}}(x) = 2^n x + 2^n - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

29. ***a)*** Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$ este injectivă

b) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x+1$ **nu** este injectivă.

c) Verificaţi dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ este injectivă.

d) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$ nu este surjectivă.

Variante bacalaureat 2007, 2008, 2009

30. Arătaţi că funcţia $f:[1,+\infty)\to[2,+\infty)$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$ este inversabilă.

Variante bacalaureat, 2008

31. Determinaţi inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=2^{2x-1}$.

32. Determinaţi inversa funcţiei bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+x+1$,.

Variante bacalaureat, 2008

33. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+3$. Calculaţi $g(0)+g(3)$.

34. Aflaţi $a\in\mathbb{Z}$ pentru care funcţia $f:[1,+\infty)\to[a,+\infty)$, $f(x)=x^2+4x$ este surjectivă.

35. Aflaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$, este injectivă.

36. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie bijectivă cu $f(1)=2$ şi $f(f(1))=4$. Calculaţi $f^{-1}(4)$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

37. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Arătaţi că există o infinitate de perechi $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $f\circ f=1_{\mathbb{R}}$.

Variante bacalaureat, 2009, enunţ adaptat

38. Se consideră o funcţie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Notăm $H=\{T\in\mathbb{R}\mid f(x+T)=f(x)\}$.

a) Arătaţi că dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$.

b) Arătaţi că dacă $T_1,T_2\in H$, atunci $T_1+T_2\in H$.

Variante bacalaureat 2009, enunţ adaptat

Tema 1.4

Funcţia de gradul I. Funcţia de gradul al II-lea

1. Funcţia de gradul I

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ (cu $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq0$), se numeşte *funcţie de gradul* I.

Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ este o dreaptă de pantă a.

Monotonia. Dacă $a>0$, atunci funcţia *f* este strict crescătoare.

Dacă $a<0$, atunci funcţia *f* este strict descrescătoare.

Semnul funcţiei de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

2. Funcţia de gradul al II-lea

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ (cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq0$), se numeşte *funcţie de gradul* al II-lea.

Forma canonică. $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$, unde $\Delta=b^2-4ac$.

Semnul funcţiei de gradul al doilea

1. $\Delta<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	

2. $\Delta=0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

3. $\Delta>0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

Observaţii

$f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$

$f(x)\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta\leq0\end{cases}$

$f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$

Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, axă de simetrie $x=-\frac{b}{2a}$, care are ramurile orientate în sus dacă $a>0$ şi în jos dacă $a<0$.

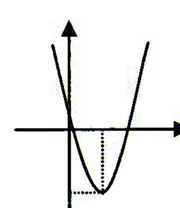
Monotonia şi punctele de extrem

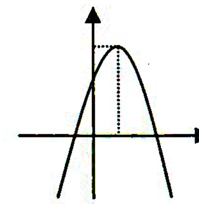
1. $a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗

2. $a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘


$a>0$


$a<0$

• Dacă $a>0$, $\min f=-\frac{\Delta}{4a}$, care se atinge în punctul (de minim) $x=-\frac{b}{2a}$.

Funcția f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$.

• Dacă $a<0$, $\max f=-\frac{\Delta}{4a}$, care se atinge în punctul (de maxim) $x=-\frac{b}{2a}$.

Funcția f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$.

Relațiile lui Viète. Fie x_1,x_2 rădăcinile ecuației $ax^2+bx+c=0$. Atunci $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$.

Observații.

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$; $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

2. Ecuația de gradul al II-lea cu rădăcinile x_1 și x_2 este $x^2-sx+p=0$, unde $s=x_1+x_2$ și $p=x_1\cdot x_2$.

Probleme propuse

1. Determinați funcția de gradul I al cărei grafic trece prin punctele $A(1,2)$ și $B(-1,0)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$. Determinați funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=ax+b$ știind că graficele funcțiilor f și g sunt simetrice față de:

a) axa Ox; *b)* axa Oy; *c)* punctul $O(0,0)$.

3. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că graficul său și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-3x+3$ sunt simetrice față de dreapta $x=1$.

Variante bacalaureat 2009

4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ știind că funcția $f:[1,3]\to[a,b]$, $f(x)=-2x+1$ este bijectivă.

5. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că funcția $f:[1,4]\to[1,7]$, $f(x)=ax+b$ este bijectivă.

6. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare. *Variante bacalaureat 2009*

7. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=\frac{m-1}{2m+2}x+3$, $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Determinați m știind că funcția f_m este strict crescătoare.

b) Determinați m știind că $A(1,0)\in G_{f_m}$.

c) Determinați m știind că $f_m(1)>f_m(3)$.

d) Determinați m știind că $f_m(1)=f_m(3)$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $|x+1|=2|x|$; *b)* $|x^2-4|=3x$;

c) $|x+2|+|x^2+x-2|=0$; *d)* $|x-3|+|4-x|=1$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile.

a) $\frac{1}{x+1}\geq 2$; *b)* $\frac{x}{x+2}\leq\frac{x+1}{x-1}$; *c)* $\frac{x^2-16}{x(x+4)}>0$; *d)* $(x-2)(x^2-3x+2)\leq 0$.

10. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile.

a) $3x^2-5x+2\leq 0$; *b)* $-2x^2+3x+5\geq 0$.; *c)* $x^4-5x^2+4<0$.

11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile.

a) $|x-1|\leq 3$; *b)* $|x-1|+|x+1|\leq 4$; *c)* $|x^2-1|<1$.

12. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile.

a) $|x+2|\leq 1$; *b)* $|12-4x|\leq 2|x-3|$; *c)* $|x+2|+|x^2-4|\leq 1$.

13. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-2m+2$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox. *Variante bacalaureat 2009*

14. Determinați toate funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strict crescătoare care îndeplinesc condiția $(f\circ f)(x)=4x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Variante bacalaureat, februarie 2008*

15. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$. *Bacalaureat 2010*

16. Arătați că soluțiile ecuației $x^2+2x+\frac{1}{x^2+2x}=2$ sunt iraționale.

17. Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+4$. *Bacalaureat 2011*

18. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

Bacalaureat 2011-model subiect

19. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+1$.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$.

a) Determinați imaginea funcției $f\circ f\circ f$.

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că imaginea funcției $g:(-\infty,a)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$ este intervalul $[1,+\infty)$.

c) Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că $f(m-x)=f(m+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

21. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că vârful parabolei $y=x^2+(2m-1)x+m^2+m$ este în cadranul I.

22. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y=x^2+2x+a$ la axa Ox este egală cu 1. *Variante bacalaureat 2009*

23. Determinați funcția f de gradul al doilea dacă $f(-1)=1, f(0)=1, f(1)=3$.

Variante bacalaureat 2009

24. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că vârful parabolei $y=x^2+ax+b$ este $V(1,2)$.

25. Punctul $V(2,3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Calculați $f(3)$. *Bacalaureat 2011*

26. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că dreapta $x=2$ este axă de simetrie pentru parabola $y=-x^2+ax+b$ și că punctul este $M(1,2)$ aparține aceleiași parabole.

27. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+m^2$ se află pe graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$.

28. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=mx^2-2(m-1)x+m+1$, $m\in\mathbb{R}^*$.

a) Determinați m știind că graficul funcției f_m nu intersectează axa Ox.

b) Determinați mulțimea valorilor funcției f_2.

c) Determinați imaginea funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_2(\sin x)$.

d) Determinați m știind că dreapta $x=2$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f.

e) Determinați m știind că $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

f) Determinați m știind că $f(x)>0$, $\forall x>0$.

29. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale. *Bacalaureat 2010*

30. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *Bacalaureat 2010*

31. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x^2+3(a-1)x+a-1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte. *Variante bacalaureat 2009*

32. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-1)x^2+2(a+1)x+a+1$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați a știind că ecuația $f(x)=0$ nu are nicio soluție.

b) Determinați a știind că inecuația $f(x)>0$ nu are nicio soluție.

c) Determinați a știind că graficul funcției f este tangent axei Ox.

d) Determinați a știind că vârful parabolei asociate graficului funcției f se află pe dreapta $x=2$.

33. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(2a-1)x+a^2+1$ este egală cu 2.

34. Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(2a-1)x+a^2+1$ este strict crescătoare.

35. Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+(2a+1)x+a^2+1$ este strict crescătoare.

36. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 ecuației $x^2+(2m+3)x+m+1=0$ verifică pe rând condițiile.

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$; *b)* $x_1^2=x_2^2$; *c)* $|x_1-x_2|=1$; *d)* $x_1+1=x_2$.

37. Se consideră ecuația $x^2-(2m-1)x+m-1=0$, $m\in\mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați valoarea minimă a expresiei $x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

38. Se consideră ecuația $x^2-(2m+1)x+m+1=0$, $m\in\mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că $x_1^2x_2=x_1x_2^2$.

39. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că rădăcinile ecuației $x^2+2(m-1)x+m-1=0$ au semne opuse.

40. Se consideră ecuația $ax^2+bx+c=0$ cu coeficienți reali și cu rădăcinile x_1 și x_2. Arătați că dacă $x_1\cdot x_2<0$, atunci $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ și $x_1\neq x_2$.

41. Aflați $m\in\mathbb{R}$ știind că $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-x+m=0\}\cap\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-2x+m+10=0\}\neq\varnothing$.

42. Fie ecuația $x^2+2x+a=0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a\in\mathbb{Z}$ știind că x_1,a,x_2 sunt în progresie aritmetică.

43. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că $f(x)<m$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați $n\in\mathbb{R}$ știind că $f(x)\geq n$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

44. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2+x-13=0$.

a) Calculați $\frac{x_1}{x_2^2+x_2-12}+\frac{x_2}{x_1^2+x_1-12}$. *b)* Calculați $\frac{x_1}{x_2^2+2x_2-13}+\frac{x_2}{x_1^2+2x_1-13}$.

c) Arătați că $S_n=x_1^n+x_2^n\in\mathbb{Z}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

45. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2+x-3=0$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că rădăcinile ecuației $x^2+ax+b=0$ sunt $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2}$.

46. Determinați o ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o rădăcină $x_1=1+\sqrt{3}$.

47. Determinați numerele reale a și b știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-ax+b=0$ verifică relațiile $x_1+x_2=3$ și $x_1x_2^2+x_2x_1^2=6$.

48. Rezolvați sistemul $\begin{cases}x+y=3\\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}\end{cases}$, unde $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

49. Rezolvați sistemul $\begin{cases}2x+y^2=3\\ x^2+2x-y^2=2\end{cases}$, unde $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

Tema 1.5

Puteri şi radicali. Ecuaţii iraţionale

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, se numeşte funcţie putere.

Funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$, unde $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, şi $D=\mathbb{R}$ dacă n este impar, respectiv $D=[0,+\infty)$ dacă n este par, se numeşte funcţie radical de ordin n.

Funcţia radical de ordinul 2 este $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$, iar funcţia radical de ordinul 3 este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Proprietăţi

1. Funcţiile $f,g:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=x^{2n}$ şi $g(x)=\sqrt[2n]{x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, sunt funcţii bijective, fiecare fiind inversa celeilalte.
2. Funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2n+1}$ şi $g(x)=\sqrt[2n+1]{x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, sunt funcţii bijective, fiecare fiind inversa celeilalte.
3. Funcţia putere de exponent impar este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Funcţia putere de exponent par este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.
4. Funcţia radical de ordin impar este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
   Funcţia radical de ordin par este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.
5. Funcţia radical de ordin impar este convexă pe $(-\infty,0]$ şi concavă pe $[0,+\infty)$.
   Funcţia radical de ordin par este concavă pe $[0,+\infty)$.

Proprietăţi ale puterilor

Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$, $r,s\in\mathbb{Q}$.

1. $a^0=1$ şi $1^r=1$; **2.** $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$; **3.** $(a\cdot b)^s=a^s\cdot b^s$; **4.** $(a^r)^s=a^{r\cdot s}$;

5. $\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$; **6.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^s=\dfrac{a^s}{b^s}$; **7.** $\begin{cases}\text{pentru } a>1 \text{ avem } a^r<a^s\Leftrightarrow r<s\\ \text{pentru } a\in(0,1) \text{ avem } a^r<a^s\Leftrightarrow r>s\end{cases}$.

Proprietăţi ale radicalilor

Pentru $a,b\in\mathbb{R}$ şi $n,k\in\mathbb{N},\ n,k\geq 3$ impare sau pentru $a\in[0,+\infty),\ b\in(0,+\infty)$ şi $n,k\in\mathbb{N}^*$ numere pare, avem

1. $\sqrt[n]{a^n}=a$; **2.** $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; **3.** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b\neq 0$; **4.** $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^k}$;

5. $a^{\frac{n}{k}}=\sqrt[k]{a^n},\ k\geq 2$; **6.** $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$; **7.** $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b$.

Probleme propuse

1. Ordonaţi crescător numerele

a) $\sqrt{2},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5}$. *Variante bacalaureat 2009*

b) $\sqrt{3},\sqrt[3]{5},\sqrt[4]{8}$. *Variante bacalaureat 2009*

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{1}},\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

d) $\sqrt{3},\sqrt{2},\sqrt[4]{6},\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2},\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

2. Arătaţi că $\left[\sqrt[n]{n}\right]=1,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

3. Arătaţi că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ este număr natural.
Variante bacalaureat 2009

4. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+\dfrac{1}{x}=4$. Calculaţi $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ şi $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+2$. Ordonaţi crescător numerele $f(1),f(\sqrt{2}),f(\sqrt[3]{3})$.

6. Fie $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ fixat. Determinaţi un număr $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ pentru care $\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{n\text{ radicali}}\in\mathbb{N}$.

7. Dacă $x=\sqrt{5-a}+\sqrt{4+a},\ a\in[-4,5]$, determinaţi în funcţie de x expresia $\sqrt{5-a}\cdot\sqrt{4+a}$.

8. Arătaţi că $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}\in(1,2)$.

9. Arătaţi că $\sqrt{6\sqrt[3]{6\sqrt[4]{6\ldots\sqrt[n]{6}}}}\in(1,6)$, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

10. Determinaţi $a\in\mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}}=2^a$.

11. Arătaţi că $(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[16]{2}+1)=\dfrac{1}{\sqrt[16]{2}-1}$.

12. Arătaţi că numărul $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.
Variante bacalaureat 2009

13. Arătaţi că numărul $\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}-\sqrt{5}$ este întreg.

14. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{3+x}=3$. Determinați $\sqrt[3]{5-x}\cdot\sqrt[3]{3+x}$.

15. Numărul $\sqrt{101}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită este egal cu $a_0,a_1a_2\ldots$. Determinați a_2.

16. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile.

a) $\sqrt{x+2}=x$.

b) $\sqrt{x+1}=x-5$.

c) $x+\sqrt{x}=6$.

d) $\sqrt{x+1}=1-2x$.

17. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile.

a) $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$. *Bacalaureat 2010*

b) $\sqrt{2x-1}=x$. *Variante bacalaureat 2009*

c) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$. *Variante bacalaureat 2009*

d) $\sqrt{x+1}=5-x$. *Variante bacalaureat 2009*

e) $\left|\sqrt{x}-1\right|=2$. *Bacalaureat 2011*

18. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}+2\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{11}{3}$;

b) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}+2\sqrt{\dfrac{x-4}{x+4}}=\dfrac{11}{3}$. *Bacalaureat 1999*

19. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\sqrt{(x+2)(x+3)}=\sqrt{12}$.

b) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+3}=\sqrt{12}$.

20. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile.

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}$.

b) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+x+2}=3$.

c) $\dfrac{x}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{2+\sqrt{x}}{x}=\dfrac{10}{3}$.

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile.

a) $\sqrt[3]{x+1}=2$

b) $\sqrt[3]{x-1}=1-x$.

c) $\sqrt[3]{1-x}=1+x$. *Variante bacalaureat 2009*

d) $\sqrt[3]{x+1}=1-2x$.

22. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile.

a) $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$. *Variante bacalaureat 2009*

b) $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+\sqrt{4x-3-4\sqrt{x-1}}=3$. *Variante bacalaureat, februarie 2008*

23. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$.

a) Rezolvați ecuația $f(x)=1$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că ecuația $f(x)=m$ admite cel puțin o soluție reală.

24. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}$.

a) Rezolvați ecuația $f(x)=3$.

b) Pentru $m\in[3,+\infty)$, arătați că ecuația $f(x)=m$ admite o singură soluție reală.

25. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile.

a) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$.

b) $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-3}=2$.

c) $x+2^x+\sqrt{x}=4$.

d) $x+\log_2 x+\sqrt[5]{x}=2$.

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x}=5$. *Variante bacalaureat, februarie 2008*

26. Determinați perechile $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pentru care $x+y+6=2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y+2}$.

27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații.

a) $\sqrt{x+2}<x$.

b) $\sqrt{x+2}\geq x$.

c) $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1$. *Variante bacalaureat 2009*

Tema 1.6

Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică. Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

1. Logaritmi

Definiţie. Fie $a>0, a\neq 1$ şi $x>0$. Unicul număr real y cu proprietatea $a^y=x$ se numeşte *logaritmul* numărului x în baza a şi se notează $\log_a x$.

Cu alte cuvinte, $\log_a x=y$ dacă şi numai dacă $a^y=x$.

Observaţii. 1. Dacă $a=10$, numărul $\log_{10}x=\lg x$ se numeşte logaritmul *zecimal* al lui x.

2. Dacă $a=e$, numărul $\log_e x=\ln x$ se numeşte logaritmul *natural* al lui x.

Proprietăţile logaritmilor

1. $a^{\log_a x}=x, \forall x>0$; **3.** $\log_a a=1, \forall a>0, a\neq 1$; **5.** $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$.

2. $\log_a a^x=x, \forall x\in\mathbb{R}$; **4.** $\log_a 1=0, \forall a>0, a\neq 1$;

Operaţii cu logaritmi

1. $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy), \forall x,y>0$; **3.** $\log_a x^p=p\log_a x, \forall x>0, \forall p\in\mathbb{R}$;

2. $\log_a x-\log_a y=\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right), \forall x,y>0$; **4.** $\log_{a^p}x=\dfrac{1}{p}\log_a x, \forall x>0, \forall p\in\mathbb{R}^*$.

Schimbarea bazei unui logaritm

1. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}, \forall a,b,x>0, a,b\neq 1$; **Consecinţă:** $\log_a x=\dfrac{\lg x}{\lg a}=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

2. $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c, \forall a,b,c>0, a,b\neq 1$;

3. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}, \forall a,b>0, a,b\neq 1$.

2. Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

Funcţia exponenţială de bază a ($a>0, a\neq 1$) este funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x$.

Funcţia logaritmică de bază a ($a>0, a\neq 1$) este funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\log_a x$.

Proprietăţi

1. Funcţiile exponenţială de bază a şi logaritmică de bază a sunt funcţii bijective, fiecare fiind inversa celeilalte.

2. Funcţiile exponenţială de bază a şi logaritmică de bază a sunt funcţii *strict crescătoare* dacă $a>1$ şi *strict descrescătoare* dacă $a\in(0,1)$.

3. Funcţia exponenţială de bază a este convexă pentru orice $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$.

Funcţia logaritmică de bază a este concavă dacă $a>1$ şi convexă dacă $a\in(0,1)$.

Probleme propuse

1. Daţi exemplu de numere $a,b\in\mathbb{N}$ care îndeplinesc condiţia $\sqrt{a}-\log_3 b\in\mathbb{N}^*$.

2. Determinaţi un triplet $(a,b,c)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ care verifică condiţia $2^a<b<\log_3 c$.

3. Calculaţi:

a) $\log_2 10+\log_2 6-\log_2 15$; *b)* $\log_3 12\cdot\log_2 3-\log_4 9$;

c) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{3}\cdot\log_3 2$; *d)* $\log_{2012}(\operatorname{tg}x)+\log_{2012}(\operatorname{ctg}x), x\in(0,1)$;

e) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{31}32$; *f)* $4^{1+\log_2 3}:6^{\log_{\sqrt{6}}8}$.

4. Arătaţi că:

a) $\log_2 5\in(2,3)$; *b)* $3\in(\log_2 9, 7\log_5 2)$;

c) $2\in\left(\log_3 4,\sqrt{5}\right)$; *d)* $\sqrt[3]{3}\in\left(\sqrt{2},\log_9 27\right)$. *Bacalaureat 2009, Variante MEdC*

5. *a)* Exprimaţi, în funcţie de $a=\log_3 2$, numărul $b=\log_{12}18$.

b) Exprimaţi, în funcţie de $a=\log_{20}2$, numărul $b=\log_5 20$.

c) Exprimaţi, în funcţie de $a=\log_3 5$, numărul $b=\log_{15}45$.

d) Exprimaţi, în funcţie de $a=\log_2 3$ şi $b=\log_3 5$, numărul $c=\log_6 60$.

6. Calculaţi sumele:

a) $A=\log_a x+\log_a x^2+\log_a x^3+\ldots+\log_a x^n$, unde $a,x>0, a\neq 1, n\in\mathbb{N}^*$;

b) $B=\ln\sqrt{x}+\ln\sqrt[2\cdot 3]{x}+\ln\sqrt[3\cdot 4]{x}+\ldots+\ln\sqrt[n(n+1)]{x}$, unde $x>0$;

c) $C=\lg\dfrac{1}{2}+\lg\dfrac{2}{3}+\lg\dfrac{3}{4}+\ldots+\lg\dfrac{999}{1000}$;

d) $D=\dfrac{1}{\lg 2\cdot\lg 4}+\dfrac{1}{\lg 4\cdot\lg 8}+\ldots+\dfrac{1}{\lg 2^n\cdot\lg 2^{n+1}}-\dfrac{n}{n+1}\log_2^2 10$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

e) $E=\dfrac{1}{\log_2 1+\log_2 2+\ldots\log_2 10}+\dfrac{1}{\log_3 1+\log_3 2+\ldots\log_3 10}+\ldots+\dfrac{1}{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg 10}$.

7. Calculaţi suma $S=[\lg 1]+[\lg 2]+[\lg 3]+\ldots+\left[\lg 10^{2008}\right]$.

Bacalaureat 2008, Variante MEdC

8. Fie $a,b>0$. Arătaţi că au loc următoarele echivalenţe:

a) $\lg\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=7ab$; *b)* $\lg\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}\Leftrightarrow a=b$;

c) $\lg\dfrac{2a+3b}{5}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}\in\left\{1,\dfrac{9}{4}\right\}$; *d)* $\lg\dfrac{a+3b}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}\Leftrightarrow a=3b$.

Bacalaureat 2008 – 2009, Variante MEdC

9. Aflaţi domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, definită prin:

a) $f(x)=\log_2(2x-4)$; *b)* $f(x)=\lg(x+1)+\lg(x-1)$;

c) $f(x)=\log_2\sqrt{1-x^2}$; *d)* $f(x)=\log_{x+2}(2-x)$;

e) $f(x)=\log_2(x^2-7x+12)$; *f)* $f(x)=\log_{|x|}(x^2)$;

10. ***a)*** Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\log_3 2^x$ este injectivă.

b) Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\log_3 2^x$ este injectivă.

11. Fie $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ și numerele $a,b,c>0$ astfel încât $\log_x a,\ \log_x b,\ \log_x c$ sunt în progresie aritmetică. Arătați că $a,\ b,\ c$ sunt în progresie geometrică.

Bacalaureat 2003

12. Fie numerele $a,b,c,x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ astfel încât $\log_a x,\ \log_b x,\ \log_c x$ sunt în progresie aritmetică. Arătați că $1+\log_c a=2\log_b a$.

13. Fie numerele distincte $a,b,c\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ în progresie geometrică. Arătați că are loc egalitatea $\dfrac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x}=\dfrac{\log_b x-\log_c x}{\log_c x}$, pentru orice $x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

14. Rezolvați ecuațiile:

a) $2^{4x+1}=512$; ***b)*** $7^{3-|x|}=49$;

c) $(0,25)^{4-x}=32$; ***d)*** $3^{x-\sqrt{x}}=9$;

e) $2^{x^2+x}=4^{x^2-x+1}$; ***f)*** $\left(\sqrt{3}\right)^{4+x-x^2}=\sqrt[3]{27}$.

15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $4^{x^2-5x+6}=16^x$; ***b)*** $2^x\cdot4^{x+1}\cdot8^{x+2}=16^{x+3}$;

c) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{8}{27}\right)^x}=\dfrac{3}{2}$; ***d)*** $9^{\frac{x}{x-1}}\cdot27^{\frac{x^2}{x+1}}=81^x$;

e) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^x\cdot\left(\dfrac{125}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{5}{2}$; ***f)*** $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x+1}\cdot\left(\dfrac{25}{9}\right)^{1-x}=\dfrac{625}{81}$.

16. Rezolvați ecuațiile:

a) $2^x+4^x=20$; ***b)*** $9^x-3^x=72$;

c) $5^x+5^{-x}=2$; ***d)*** $16^x-3\cdot4^x=4$;

e) $2^{2x+1}+2^{x+2}=160$; ***f)*** $2^{2x}-3\cdot2^{x+1}+8=0$;

g) $3^{2x+1}-10\cdot3^{x+1}+27=0$; ***h)*** $2^x+16\cdot2^{-x}=10$. *Bacalaureat 2009, Variante MEdC*

17. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x}=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-x}$; ***b)*** $\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x=6$.

18. ***a)*** Arătați că, pentru orice număr real x, numerele $2^x,\ 4^x,\ 8^x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

b) Arătați că există un unic număr real x pentru care numerele $2^x,\ 4^x,\ 8^x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

19. Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $3^{2x-1},\ 9^x-3$ și 3^x+6 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

20. Rezolvați ecuațiile:

a) $\log_2\left(3x^2-x-2\right)=3$; ***b)*** $\log_{x+1}\left(x^2-3x+1\right)=1$;

c) $\log_2(3x-2)+\log_2(x+2)=4$; ***d)*** $\log_{x+2}\left(2x^2+5x+2\right)=2$.

21. Rezolvați ecuațiile:

a) $\log_2\left(\log_3(\log_5 x)\right)=0$; ***b)*** $\log_2\left[4-\log_3(x+3)\right]=1$;

c) $\log_3\left(2x^2+1\right)-\log_3(x+1)=1$; ***d)*** $\log_5(x+1)-2\log_5(3x-7)=-1$;

e) $\log_3(x+4)+\log_3(2x-1)=\log_3(20-x)$; ***f)*** $1+\log_2(x+1)=\log_2(x+2)$;

g) $\log_2(x+1)+\log_4(x+1)+\log_8(x+1)=22$; ***h)*** $\log_2 x+\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\sqrt[4]{2}}x=14$.

Bacalaureat 2009, Variante MEdC

22. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale:

a) $2\log_3(9x)-3\log_{27}x=6$; ***b)*** $\log_x(9x)+\log_3 x=4$;

c) $\log_9(2x+10)\cdot\log_{x+1}3=1$; ***d)*** $\log_2^2(2x)+3\log_2(4x)=13$;

e) $\lg^2 x-5\lg x+6=0$; ***f)*** $4\lg^4 x-10\lg^2 x^2+36=0$;

g) $\log_3\left(9^x-6\right)=x$; ***h)*** $\log_2\left(9^x+7\right)=2+\log_2\left(3^x+1\right)$.

23. Aflați numerele reale $x>2$ pentru care numerele $\log_2(x-2),\ \log_2 x$ și $\log_2(x+4)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

24. Se consideră numerele reale $a,x\in(0,\infty)$, $a\neq1$. Demonstrați că:

$$\log_{a^2}x+\log_{a^{2\cdot3}}x+\log_{a^{3\cdot4}}x+\ldots+\log_{a^{n(n+1)}}x=\frac{n}{n+1}\log_a x,\ \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}^*.$$

25. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale:

a) $(3x)^{1+\log_3 x}=81$; ***b)*** $x^{\log_2(4x)}=8$;

c) $3\log_{100x}100=4\log_{10x}10$; ***d)*** $10^{\log_2 x}=2^{\log_2^2 x}$;

e) $\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1$; ***f)*** $\log_{\sqrt{11}}\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=2$;

26. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\log_2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)+2\log_4\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\log_2 x.$$

27. Fie $a\in(1,\infty)$ un număr real fixat. Se consideră expresia

$$E(x)=\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}},\ \text{unde } x\in(1,\infty).$$

a) Verificați egalitatea $E(a)=1$.

b) Arătați că $E(x)=\begin{cases}\sqrt{\log_a x}, & \text{dacă } x>a\\ \sqrt{\log_x a}, & \text{dacă } x\in(1,a)\end{cases}$.

c) Rezolvați ecuația $E(x)=a$.

Tema 1.7

Numere complexe

$\mathbb{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$, unde $i^2=-1$, este mulţimea numerelor complexe.

Dacă $z=x+iy$, unde $x,y\in\mathbb{R}$, numerele reale x şi y se numesc partea reală şi respectiv partea imaginară a numărului complex z; notăm $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

Elementele mulţimii $i\mathbb{R}^*=\{iy \mid y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ se numesc numere *pur imaginare*.

Modulul unui număr complex $z=x+iy$ este numărul real $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Proprietăţi: **1.** $|z|\ge 0,\ \forall z\in\mathbb{C}$; $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

2. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

3. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|, \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

Conjugatul unui număr complex $z=x+iy$ este numărul complex $\bar{z}=x-iy$.

Proprietăţi: **1.** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$; **3.** $|z|=|\bar{z}|,\ \forall z\in\mathbb{C}$;

2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$; **4.** $z\cdot\bar{z}=|z|^2,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Observaţii. **1.** $z\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\bar{z}=z$;

2. $z\in i\mathbb{R}^*$ dacă şi numai dacă $\bar{z}=-z$.

1. Forma trigonometrică a unui număr complex

Pentru orice număr complex nenul $z=x+iy$ există şi sunt unice numerele reale $r>0$ şi $\varphi\in[0,2\pi)$ astfel încât $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Avem $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ şi $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+k\pi$, unde $k=\begin{cases}0, \text{ dacă } x>0 \text{ şi } y\ge 0\\ 1, \text{ dacă } x<0\\ 2, \text{ dacă } x>0 \text{ şi } y<0\end{cases}$.

Dacă $x=0$ şi $y>0$, atunci $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$; dacă $x=0$ şi $y<0$, atunci $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$.

Operaţii cu numere complexe scrise sub forma trigonometrică

Fie $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Atunci:

1. $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$; **2.** $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$;

3. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\left(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\right)$; **4.** $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$.

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. *Rădăcinile de ordinul* n ale numărului complex $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ sunt $z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,\ldots,n-1$. *Rădăcinile de ordinul* n *ale unităţii* formează mulţimea $U_n=\{z\in\mathbb{C} \mid z^n=1\}=\left\{\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n} \,\middle|\, k=0,1,\ldots,n-1\right\}$.

2. Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie

A1. Formula distanţei dintre două puncte: $MN=|z_M-z_N|$.

A2. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $z_A+z_C=z_B+z_D$.

A3. Fie punctele $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ în planul xOy. Atunci:

a. $m(\widehat{AOB})=\arg\dfrac{b}{a}$; **b.** $m(\widehat{BAC})=\arg\dfrac{c-a}{b-a}$; **c.** $m(\widehat{AB,CD})=\arg\dfrac{d-c}{b-a}$;

d. $AB\parallel CD\Leftrightarrow\dfrac{d-c}{b-a}\in\mathbb{R}^*$; **e.** $AB\perp CD\Leftrightarrow\dfrac{d-c}{b-a}\in i\mathbb{R}^*$;

f. A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă $\dfrac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}^*$;

g. A, B, C, D sunt conciclice sau coliniare dacă $\dfrac{b-a}{c-a}:\dfrac{b-d}{c-d}\in\mathbb{R}^*$.

A4. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$. Atunci:

a. Triunghiurile la fel orientate ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea dacă $\dfrac{b'-a'}{c'-a'}=\dfrac{b-a}{c-a}$.

b. Triunghiurile invers orientate ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea dacă $\dfrac{b'-a'}{c'-a'}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}$.

Observaţie. Triunghiul ABC este *pozitiv orientat* dacă sensul A–B–C, parcurs pe cercul circumscris triunghiului ABC, coincide cu sensul direct trigonometric. În caz contrar triunghiul ABC este *negativ orientat*.

A5. Fie R_M^α rotaţia de centru M şi unghi α. Considerăm punctele $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Atunci:

a. Dacă $B=R_O^\alpha(A)$, atunci $b=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

b. Dacă $C=R_A^\alpha(B)$, atunci $c-a=(b-a)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

Probleme propuse

1. Calculaţi:

a) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{10}$; b) $1+i+i^2+\ldots+i^{10}$;

c) $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$; d) $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$;

e) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\ldots(1-i^{2008})$; f) $(2+i)^4+(2-i)^4$;

g) $\left(\dfrac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$; h) $\dfrac{25}{4+3i}+\dfrac{25}{4-3i}$;

Bacalaureat 2007 – 2009, variante MEdCT

2. Demonstraţi că:

a) $\dfrac{25}{4+3i}+\dfrac{25}{4-3i}\in\mathbb{Z}$; b) $\dfrac{1+3i}{1-3i}+\dfrac{1-3i}{1+3i}\in\mathbb{R}$;

c) $(3+i\sqrt{2})^3+(3-i\sqrt{2})^3\in\mathbb{Z}$; d) $(1+i)^{2008}+(1-i)^{2008}\in\mathbb{N}$;

e) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{2008}\in\mathbb{R}$; f) $(1+i)^{2008}+(1-i)^{2008}\in\mathbb{N}$;

Bacalaureat 2008 – 2009, variante MEdCT

3. *a)* Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ știind că $x(1+2i)+y(2-i)=4+3i$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $\frac{a+2i}{2+ai} \in \mathbb{R}$.

c) Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z=\frac{1}{a(1+i)+1-2i}$ are partea reală egală cu $\frac{2}{5}$.

Bacalaureat 2008 – 2009, variante MEdCT

4. *a)* Determinați numerele complexe z care verifică relația $z+7i=6\cdot\bar{z}$.

b) Determinați $z \in \mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z}+1}{z+3}=\frac{1}{2}$.

c) Determinați numerele complexe z care verifică relația $2\bar{z}+z=3+4i$.

Bacalaureat 2008, variante MEdCT

5. *a)* Fie $z \in \mathbb{C}$. Arătați că dacă $2z+3\bar{z} \in \mathbb{R}$, atunci $z \in \mathbb{R}$.

b) Fie $z \in \mathbb{C}$. Arătați că dacă $z^2+\bar{z}^2 \geq 2|z|^2$, atunci $z \in \mathbb{R}$.

Bacalaureat 2009, variante MEdCT

6. *a)* Calculați $\frac{z^2}{16}+\frac{4}{z}$, știind că z este soluție a ecuației $z^2-4z+16=0$.

b) Calculați $\frac{z^5}{27}-\frac{27}{z}$, știind că z este soluție a ecuației $z^2+3z+9=0$.

c) Calculați $z^2-\frac{8}{z}$, unde z este soluție a ecuației $z^2+2z+4=0$.

7. *a)* Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}^*$ verifică relația $z^2+|z|^2+\bar{z}^2=0$, atunci $z^{2010}=\bar{z}^{2010}$.

b) Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}^*$ verifică relația $z^2-|z|^2+\bar{z}^2=0$, atunci $z^{2010}=\bar{z}^{2010}$.

c) Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}^*$ verifică relația $z+i\bar{z}=0$, atunci $\left(\frac{z}{|z|}\right)^4=-1$.

8. Determinați numerele complexe z care verifică egalitatea:

a) $z^2=i\bar{z}$; *b)* $\bar{z}^2=iz$.

9. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $z^2+100=0$; *b)* $z^2=2i$;

c) $z^2-4z+5=0$; *d)* $z^2-8z+25=0$;

e) $z^4+8z^2-9=0$; *f)* $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2+\frac{z+1}{z-1}+1=0$;

g) $z^2-(1+i)z+i=0$; *h)* $iz^2+(3+i)z+2-2i=0$.

Bacalaureat 2008 – 2009, variante MEdCT

10. Arătați că, dacă ε este soluție a ecuației $x^2+x+1=0$, atunci, pentru orice $a,b,c \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon) \geq 0$.

11. Arătați că dacă ω este soluție a ecuației $x^2-x+1=0$, atunci, pentru orice $a,b,c \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(a-b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2-c\omega) \geq 0$.

12. Demonstrați că $2\operatorname{Re}\alpha \leq |\alpha|^2$, unde α este soluție a ecuației $x^2-2ax+a^2+1=0$, $a \in \mathbb{R}$.

13. *a)* Demonstrați că dacă $a \in \mathbb{R}$ și $a>\frac{1}{4}$, atunci soluțiile ecuației $ax^2-(2a-1)x+a=0$ au modulul 1.

b) Demonstrați că dacă $a \in \mathbb{R}$ și $|a|<2$, atunci soluțiile ecuației $x^2-ax+1=0$ au modulul egal cu 1.

14. Determinați modulele soluțiilor ecuației $2009x^2-2\cdot 2008x+2009=0$.

15. Determinați argumentul redus al numerelor complexe nenule z care verifică relația:

a) $z+\bar{z}=|z|$; *b)* $|\bar{z}-i|=|z-1|$;

c) $|z-i|=|z-1|$; *d)* $z^2=-2i$.

16. Demonstrați că oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^*$ imaginile geometrice ale numerelor complexe 0, z, $\bar{z}$ și $z+\bar{z}$ sunt vârfurile unui romb.

17. Demonstrați că oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^*$ imaginile geometrice ale numerelor complexe z, iz, i^2z și i^3z sunt vârfurile unui pătrat.

18. Demonstrați că imaginile geometrice ale soluțiilor ecuației $x^3=1$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

19. Demonstrați că:

a) imaginile geometrice ale numerelor complexe z care verifică relația $(z+i\bar{z})^4=0$ sunt situate pe dreapta de ecuație $x+y=0$.

b) imaginile geometrice ale numerelor complexe z care verifică relația $(z-i\bar{z})^4=0$ sunt situate pe dreapta de ecuație $x-y=0$.

20. *a)* Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z|=1$, atunci $z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}} \leq 2$.

b) Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z|=1$, atunci $\left|z^{2009}-\frac{1}{z^{2009}}\right| \leq 2$.

c) Arătați că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc relația $(z^{2009}-i^{2009})(\bar{z}^{2009}+i^{2009}) \geq 0$.

21. Demonstrați că pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ are loc relația $\left|\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right| \leq 2$.

22. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și $z=\frac{1-\cos a-i\sin a}{1+\cos a+i\sin a}$. Arătați că $\operatorname{Re} z=0$.

23. Arătați că $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg} n\varphi}{1-i\operatorname{tg} n\varphi}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$ și $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

Tema 1.8

Metode de numărare. Elemente de combinatorică. Matematici financiare

1. Probleme de numărare

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ și $0! = 1$.

Numărul submulțimilor unei mulțimi finite cu n elemente este 2^n.

Regula sumei. Dacă un obiect A poate fi ales în m moduri, iar un obiect B poate fi ales în n moduri, astfel încât nicio alegere a lui A să nu coincidă cu vreo alegere a lui B, atunci alegerea „lui A sau B" poate fi realizată în $m+n$ moduri.

Regula produsului. Dacă un obiect A poate fi ales în m moduri, iar pentru fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A,B) poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

Principiul includerii și excluderii. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}(A \cap B)$.

2. Elemente de combinatorică

O *submulțime ordonată* cu k elemente a mulțimii A este un k-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k-\text{ori}}$, în care $x_i \neq x_j$, pentru orice $i, j = \overline{1,k}$, $i \neq j$.

Permutări. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu n elemente. O *permutare* a mulțimii A este o mulțime ordonată formată cu cele n elemente ale mulțimii A. Orice funcție bijectivă $f: A \to A$ definește o permutare a mulțimii A.

Numărul permutărilor unei mulțimi cu n elemente este $P_n = n!$ (*permutări de n*). Prin convenție, $P_0 = 1$.

Aranjamente. Numărul submulțimilor ordonate cu k elemente dintr-o mulțime cu n elemente este $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (*aranjamente de n luate câte k*).

Combinări. Numărul submulțimilor cu k elemente dintr-o mulțime cu n elemente este $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ (*combinări de n luate câte k*).

Proprietăți

1. Formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2. Formulă de recurență pentru combinări: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

5. $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

6. $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Observații. Fie A o mulțime cu n elemente și B o mulțime cu m elemente. Atunci:

1. Dacă $n \leq m$, numărul funcțiilor injective $f: A \to B$ este egal cu A_m^n.

2. Dacă $m = n$, numărul funcțiilor bijective $f: A \to B$ este egal cu $P_n = n!$.

3. Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$ și $n \leq m$, numărul funcțiilor strict crescătoare/descrescătoare $f: A \to B$ este egal cu C_m^n.

3. Binomul lui Newton

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dezvoltarea binomială are $n+1$ termeni.

2. *Termenul general al dezvoltării* este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (termenul de rang $k+1$)

3. C_n^k se numește *coeficientul binomial* al termenului T_{k+1}.

Probleme propuse

1. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n-1)! + n!} = \dfrac{15}{4}$.

2. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n-1)!} \leq 24$.

3. Determinați $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$ astfel încât $C_{2x-3}^2 = 3$.

Variante bacalaureat 2009

4. Determinați $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ astfel încât $C_x^2 + A_x^2 = 30$.

5. Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $C_n^2 + A_n^2 = 18$.

6. Arătați că $(20!)^2$ divide numărul $40!$

7. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $C_{4n+5}^{n^2} > 10$.

Variante bacalaureat, 2008

8. **a)** Rezolvați ecuația $A_{n+2}^{n^2} + C_{n^2}^{n} = 4$.

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $C_{2x-3}^{11-x^2} = 3$.

Variante bacalaureat, 2008

9. Calculați $C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{16}^{12} + C_{17}^{13} - C_{18}^{13}$.

10. Calculați $\dfrac{C_{2011}^{100} + 2C_{2011}^{101} + C_{2011}^{102}}{C_{2013}^{102}}$.

11. Arătați că $C_{a+b}^a = C_{a+b}^b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{N}^*$.

12. Arătați că $C_{2012}^{100} < C_{2013}^{1912}$.

13. Calculați $C_{10}^0 - C_{10}^2 + C_{10}^4 - C_{10}^6 + C_{10}^8 - C_{10}^{10}$.

14. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10} = 2^x$.

15. Determinați n știind că $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 1024$.

16. Calculați $\dfrac{C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + ... + C_{100}^{100}}{C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + ... + C_{100}^{100}}$.

17. Determinați termenul care nu îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{200}$.

18. Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Aflați termenul care-l conține pe a^4 din dezvoltarea $\left(a^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$.

Variante bacalaureat 2009

19. Determinați x știind că suma dintre termenii al treilea și al patrulea din dezvoltarea $(2^x - 1)^5$ să fie $20 \cdot 2^x$. *Variante bacalaureat, februarie 2008*

20. Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}\right)^{100}$.

21. Calculați sumele:

a) $C_{2n+1}^0 - 2C_{2n+1}^1 + 2^2 C_{2n+1}^2 - ... - 2^{2n+1} C_{2n+1}^{2n+1}$.

b) $C_{20}^0 + 3C_{20}^1 + 3^2 C_{20}^2 + ... + 3^{20} C_{20}^{20}$.

c) $C_{10}^0 + 5^2 C_{10}^2 + ... + 5^{10} C_{10}^{10}$.

22. Din cei 18 băieți și 11 fete aflați într-o clasă se alege o echipă de 7 elevi.

a) Determinați în câte moduri se poate alege această echipă.

b) Determinați care este numărul de echipe care se poate forma știind că sunt 4 băieți.

23. Determinați numărul de segmente orientate cu extremitățile în vârfurile unui poligon convex cu 100 de laturi.

24. Aflați numărul de submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 18\}$ care conțin elementul "1".

25. Determinați probabilitatea ca alegând o funcție $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ aceasta să fie strict crescătoare.

26. Determinați probabilitatea ca, alegând o funcție $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$, aceasta să îndeplinească proprietatea $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$.

27. Determinați probabilitatea ca, alegând o funcție $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2\}$, aceasta să fie surjectivă.

28. Un elev se joacă cu cifrele 1, 2, 3, 4 și cu literele a, b, c, d, e, f, formând „cuvinte" cu 5 astfel de semne diferite (cifre sau litere) într-o ordine oarecare.

a) Câte „cuvinte" poate forma elevul?

b) Câte „cuvinte" se pot forma astfel încât primele două semne să fie cifre?

c) Câte astfel de „cuvinte" poate forma elevul astfel încât să folosească numai litere?

29. *a)* Aflați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, ..., 8\}$.

b) Determinați numărul elementelor unei mulțimi care are 45 de submulțimi cu exact două elemente.

c) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $A = \{1, 2, ..., n\}$ are 35 de submulțimi cu exact trei elemente.

d) Se dă mulțimea $A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Determinați numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente, dintre care exact două sunt numere pare.

Variante bacalaureat 2009

30. *a)* Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 2, 4, 6 sau 8?

b) Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5, 7 sau 9?

c) Câte numere de patru cifre, nu neapărat distincte, se pot forma cu cifrele 1, 3, 5, 7, 9?

Variante bacalaureat 2009

31. *a)* Aflați numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea $f(1) = f(4)$.

b) Aflați numărul funcțiilor $f : \{0, 1, 2\} \to \{2, 3, 4\}$ care verifică relația $f(2) = 2$.

c) Aflați numărul funcțiilor $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ cu proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.

d) Aflați numărul funcțiilor $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea $f(1) = 1$.

e) Aflați numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

f) Aflați numărul funcțiilor strict monotone $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Variante bacalaureat 2009

32. *a)* Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

b) Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

c) Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 4.

d) Calculați probabilitatea ca, alegând trei cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, acestea să fie toate pare.

e) Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din primele 40 de numere naturale nenule, acesta să nu conțină cifra 7.

f) Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din primele 30 de numere naturale nenule, acesta să conțină cifra 1.

g) Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alegem la întâmplare o submulțime nevidă B a lui A. Determinați probabilitatea ca B să aibă toate elementele impare.

Variante bacalaureat 2009

33. Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\right\}$, acesta să fie număr rațional.

34. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din produsul cartezian $A \times A$, produsul numerelor a și b să fie par.

Tema 1.9

Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică

1. Vectori în plan

Regula paralelogramului: În paralelogramul $ABCD$ avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Regula triunghiului. În triunghiul ABC avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Consecință. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, pentru orice punct O din plan.

Înmulțirea vectorilor cu scalar. Pentru $\vec{u}$ un vector oarecare din plan și pentru un număr real k, $k\vec{u}$ este un vector cu aceeași direcție ca și $\vec{u}$, de modul egal cu $|k|\cdot|\vec{u}|$ și care are același sens cu $\vec{u}$ pentru $k>0$ și sens opus lui $\vec{u}$, pentru $k<0$.

Teorema medianei (forma vectorială). Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ dacă și numai dacă, pentru orice punct O din plan, avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$.

Punctul care împarte un segment într-un raport dat. Pentru un punct $M\in AB$ astfel încât $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$, avem $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OA}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{OB}$, pentru orice punct O din plan.

Relația lui Leibniz. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$, pentru orice punct O din plan.

Relația lui Sylvester. Fie H și O ortocentrul, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Produsul scalar dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Proprietățile produsului scalar

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; *b)* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$; *f)* $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.

e) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$; *c)* $\vec{u}\cdot\vec{v}>0\Leftrightarrow(\widehat{\vec{u},\vec{v}})<\frac{\pi}{2}$; *d)* $\vec{u}\cdot\vec{v}<0\Leftrightarrow(\widehat{\vec{u},\vec{v}})>\frac{\pi}{2}$.

2. Vectori în planul xOy

Un vector $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ are coordonatele (x,y) și scriem $\vec{u}(x,y)$.

Proprietăți importante. Fie $\vec{u}(x,y)$ și $\vec{v}(x',y')$ doi vectori din planul xOy. Atunci

1. $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$. **2.** $\vec{u}(x,y)=\vec{v}(x',y')\Leftrightarrow x=x',\ y=y'$.

3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$. **4.** $\vec{u}(x,y)\perp\vec{v}(x',y')\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

5. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$. **6.** $\vec{u}(x',y')\parallel\vec{v}(x',y')\Leftrightarrow\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$.

7. Vectorul de poziție al punctului $A(x_A,y_A)\in xOy$ este $\vec{r}_A=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$.

8. Pentru două puncte A și B din planul xOy avem $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$.

3. Dreapta în plan.

Fie d o dreaptă în planul xOy. Panta dreptei d este tangenta unghiului format de dreaptă cu semiaxa pozitivă Ox. Ecuația generală a unei drepte d este $d: ax+by+c=0$.

Proprietăți importante.

1. Dreapta care trece pin punctul $A(x_A,y_A)$ și are panta dată m are ecuația $d: y-y_A=m(x-x_A)$.

2. Dacă dreapta d are ecuația $d: y=mx+n$, atunci m este panta dreptei d.

3. Dacă dreapta d are ecuația $d: ax+by+c=0$, atunci panta dreptei d este egală cu $m=-\frac{a}{b}$, $b\neq 0$.

4. Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au pantele egale, adică $d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_1=m_2$.

5. Două drepte d_1 și d_2 sunt perpendiculare dacă și numai dacă $m_1\cdot m_2=-1$.

6. Distanța dintre punctul $A(x_A,y_A)$ și dreapta $d: ax+by+c=0$ este $d(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

7. Dreptele $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ și $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ coincid dacă $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

8. Dreptele $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ și $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ sunt paralele (și neegale) dacă $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

Chiar dacă nu este scopul acestui capitol, considerăm util să introducem aici câteva aplicații ale determinanților în geometrie.

9. Fie $A(x_A,y_A)$ și $B(x_B,y_B)$. Ecuația dreptei AB cu scrisă cu ajutorul determinantului este $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}=0$.

10. Fie $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ și $C(x_C,y_C)$.

Aria triunghiului ABC, scrisă cu ajutorul determinantului, este egală cu $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$.

11. Punctele $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ și $C(x_C,y_C)$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$.

Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$ şi $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{CP}$. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FE}$. Demonstraţi că punctele A, F şi C sunt coliniare.

Variante bacalaureat 2009

3. Se consideră triunghiul MNP şi punctul A astfel încât $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{PA}=a\overrightarrow{PM}+b\overrightarrow{PN}$.

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctul E astfel încât $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{CE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$.

5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Calculaţi modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Variante bacalaureat 2009

6. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB=3$ şi $AC=4$. Dacă D este punctul de intersecţie dintre bisectoarea unghiului A şi dreapta AB, determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

7. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N,P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Arătaţi că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

8. Demonstraţi că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Variante bacalaureat 2009

9. Fie M un punct din planul triunghiului ABC astfel încât $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Arătaţi că M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

10. Se consideră patrulaterul $ABCD$ şi punctele M şi N mijloacele laturilor AB şi CD. Arătaţi că $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

11. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N,P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$ şi $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$. Arătaţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

12. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

13. Se consideră triunghiul ABC, cu lungimile laturilor $AB=c$, $AC=b$ şi un punct D astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Arătaţi că semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC.

Variante bacalaureat 2009

14. În planul xOy se consideră triunghiul ABC astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+12\vec{j}$. Determinaţi perimetrul triunghiului ABC.

15. În planul xOy se consideră vectorii $\vec{u}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

a) Determinaţi un vector $\vec{v}$ de lungime 6 coliniar cu $\vec{u}$.

b) Determinaţi un vector $\vec{w}$ de lungime 5 perpendicular pe $\vec{u}$.

16. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorul $\vec{u}=a\vec{i}-3\vec{j}$ este paralel cu dreapta $d: x+y-2=0$.

17. Se consideră triunghiul ABC astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{i}+2\vec{j}$.

a) Determinaţi lungimea medianei din A.

b) Determinaţi vectorului $\overrightarrow{BG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

18. Se consideră triunghiul ABC astfel încât $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}+12\vec{j}$. Determinaţi lungimea bisectoarei din A.

19. Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 60^0, $AB=4$ şi $AC=5$. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Examen Bacalaureat, iunie 2011

20. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$, $P(-1,2)$. Determinaţi coordonatele lui Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

Examen Bacalaureat 2011

21. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a-1)\vec{i}+\vec{j}$ au aceeaşi lungime.

22. Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Determinaţi $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

23. Determinaţi cosinusul unghiului format de vectorii $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$.

24. Aflaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care unghiul dintre vectorii $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$ este de 60^0.

25. Se consideră triunghiul ABC astfel încât $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{i}+2\vec{j}$. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AD}$, unde D este proiecţia lui A pe dreapta BC.

26. Arătaţi că unghiul vectorilor $\vec{u}=5\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ este obtuz.

Variante bacalaureat 2009

27. Se consideră triunghiul ABC astfel încât $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+3\vec{j}$. Determinaţi lungimea înălţimii din A.

28. Paralelogramul $ABCD$ are $AD=6$, $AB=4$ şi $m(\widehat{ADC})=120^0$. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$.

Examen Bacalaureat 2010

29. Determinaţi aria triunghiului ABC ştiind că $\overrightarrow{BA}=2\vec{i}+\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=-\vec{i}+3\vec{j}$.

30. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(3,1)$, $C(-1,1)$. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

31. Se consideră vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ astfel încât $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ şi $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=120°$.

Determinaţi: ***a)*** $\vec{u}\cdot\vec{v}$; ***b)*** $|\vec{u}+\vec{v}|$; ***c)*** $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}+\vec{v}})$.

32. Determinaţi unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ ştiind că $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=2$ şi $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\sqrt{3}$.

33. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB, unde $A(2,3)$ şi $B(-3,-2)$

Variante bacalaureat 2009

34. În planul xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(-1,3)$.

a) Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $O(0,0)$ şi este paralelă cu dreapta AB.

b) Determinaţi punctul $C \in Ox$ pentru care $AC \perp AB$.

35. Se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,-1)$ şi $M(1,-1)$. Determinaţi coordonatele punctelor C şi D pentru care patrulaterul $ABCD$ este paralelogram cu centrul în M.

36. Se consideră punctele $A(-1,-5)$ şi $B(2,1)$. Determinaţi coordonatele punctului M pentru care $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

37. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(0,6)$ şi $C(12,12)$. Determinaţi coordonatele punctului $M(u,v)$ astfel încât $AM = BM = CM$.

Examen Bacalaureat 2001

38. Scrieţi ecuaţia dreptei ce conţine punctul $A(2,5)$ şi este paralelă cu vectorul $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

39. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(1,2)$ şi este perpendiculară pe vectorul $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

40. În sistemul de coordonate xOy se consideră $A(3,5)$, $B(-2,5)$, $C(6,-3)$. Determinaţi ecuaţia medianei corespunzătoare laturii $[BC]$ în triunghiul ABC.

Examen Bacalaureat 2010

41. În sistemul de coordonate xOy se consideră $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ şi $D(4,a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi a astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

42. Fie $G(1,0)$ centrul de greutate al triunghiului ABC, unde $A(2,5)$ şi $B(-1,-3)$. Determinaţi coordonatele punctului C.

43. Calculaţi distanţa de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(1,0)$ şi $C(0,1)$.

44. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: ax + y + 2011 = 0$ şi $d_2: x - 2y = 0$ sunt paralele.

45. Scrieţi ecuaţia care conţine punctul $A(3,2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: x + 2y + 5 = 0$.

Bacalaureat 2011, model subiect MECTS

46. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(-2,1)$. Determinaţi ecuaţia perpendicularei în A pe dreapta AB.

47. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-2,3)$ şi $B(0,1)$. Determinaţi distanţa de la punctul $M(1,5)$ la mediatoarea segmentului $[AB]$.

48. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(5,4)$ şi $C(2,-3)$. Determinaţi ecuaţia înălţimii din C.

49. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care distanţa dintre dreptele $d_1: x + y + 2011 = 0$ şi $d_2: x + y + a = 0$ este egală cu 2.

50. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele distincte $d_1: 3x + 4y + 2 = 0$, $d_2: 3x + 4y = 0$ şi $d_3: 3x + 4y + a = 0$ sunt echidistante.

51. Determinaţi ecuaţia dreptei d_1 ştiind că dreptele d_1 şi $d_2: x + 2y + 4 = 0$ sunt simetrice faţă de axa Ox.

52. Determinaţi $a + b$ ştiind că punctele $A(1,2)$ şi $B(-1,1)$ aparţin dreptei $d: x + ay + b = 0$.

53. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1: mx + (m-2)y + 2 = 0$ şi $d_2: y = 3x + 1$ sunt paralele.

54. Determinaţi $a + b \in \mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1: x + ay + 2 = 0$ şi $d_2: y = -2x + b$ coincid.

55. Fie punctele $A(-1,3)$, $B(1,-1)$ şi $C(a,b)$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Arătaţi că, dacă $2a + b \neq 1$, atunci punctele A, B şi C sunt necoliniare.

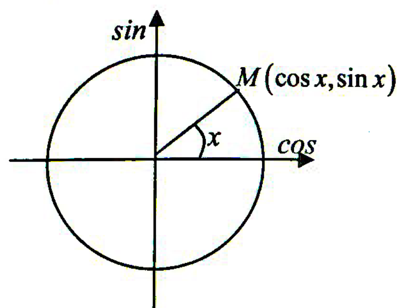
b) Arătaţi că dacă b este număr par, atunci aria triunghiului ABC este un număr natural impar.

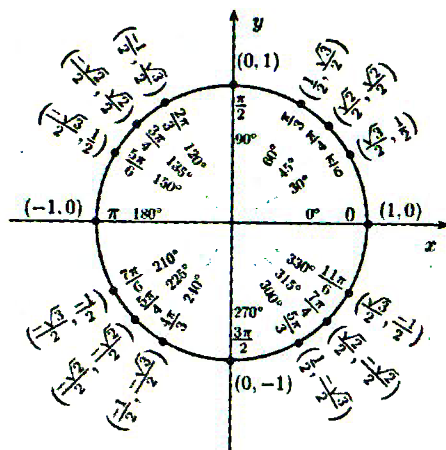
Tema 1.10

Trigonometrie. Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar în geometria plană

1. Elemente de trigonometrie

Cercul trigonometric este un cerc de rază 1, cu centrul în originea reperului cartezian.
Axa Ox se numeşte şi *axa cosinusurilor*, iar axa Oy se numeşte *axa sinusurilor*.





Formule trigonometrice fundamentale.

Pentru următoarele formule considerăm numerele reale a, b astfel încât să aibă sens următoarele formule.

1. Formula fundamentală a trigonometriei. $\sin^2 a+\cos^2 a=1$.

2. Reducerea la primul cadran.

2.1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{ctg}a$, $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{tg}a$.

2.2. $\sin(\pi-a)=\sin a$, $\cos(\pi-a)=-\cos a$, $\text{tg}(\pi-a)=-\text{tg}a$, $\text{ctg}(\pi-a)=-\text{ctg}a$.

2.3. $\sin(\pi+a)=-\sin a$, $\cos(\pi+a)=-\cos a$, $\text{tg}(\pi+a)=\text{tg}a$, $\text{ctg}(\pi+a)=\text{ctg}a$.

2.4. $\sin(2\pi-a)=-\sin a$, $\cos(2\pi-a)=\cos a$, $\text{tg}(2\pi-a)=-\text{tg}a$, $\text{ctg}(2\pi-a)=-\text{ctg}a$.

3. Paritatea funcţiilor trigonometrice.
$\sin(-a)=-\sin a$, $\cos(-a)=\cos a$, $\text{tg}(-a)=-\text{tg}a$, $\text{ctg}(-a)=-\text{ctg}a$.

4. Periodicitatea funcţiilor trigonometrice. Pentru orice $k\in\mathbb{Z}$ avem:
$\sin(2k\pi+a)=\sin a$, $\cos(2k\pi+a)=\cos a$, $\text{tg}(k\pi+a)=\text{tg}a$, $\text{ctg}(k\pi+a)=\text{ctg}a$,

5. $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$, $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$,

6. $\sin 2a=2\sin a\cos a$, $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1$.

7. $\text{tg}(a\pm b)=\frac{\text{tg}a\pm\text{tg}b}{1\mp\text{tg}a\text{tg}b}$, $\text{tg}2a=\frac{2\text{tg}a}{1-\text{tg}^2 a}$.

8. $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$, $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$.

9. Transformarea sumelor în produse şi a produselor în sume

a. $\sin a\pm\sin b=2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2}$

b. $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$;

c. $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$;

d. $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

e. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$

f. $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$.

10. Pentru $t=\text{tg}\frac{a}{2}$ avem $\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\text{tg}a=\frac{2t}{1-t^2}$, $a\neq k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

2. Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar în geometria plană

Considerăm triunghiul ABC cu notaţiile cunoscute: $a=BC$, $b=AC$ şi $c=AB$, R este raza cercului circumscris triunghiului, p este semiperimetrul triunghiului ABC, iar r este raza cercului înscris.

Teorema cosinusului. În orice triunghi ABC avem $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

Teorema sinusurilor. În orice triunghi ABC avem $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

Formule pentru aria triunghiului. Dacă notăm cu S_{ABC} este aria triunghiului ABC avem:

$S_{ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{abc}{4R}=pr$, unde h_a este înălţimea corespunzătoare laturii a.

Formula lui Heron $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Formule pentru triunghiul dreptunghic. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza BC, avem: $S_{ABC}=\frac{bc}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}$, $h_a=\frac{bc}{a}$, iar mediana din A este $m_a=\frac{1}{2}BC$.

Formule pentru triunghiul echilateral. Dacă triunghiul ABC este echilateral cu latura a avem: $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ şi mediana din A este $m_a=h_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. Funcţii trigonometrice inverse şi ecuaţii trigonometrice

Funcţia arcsin $:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ este inversa funcţiei $\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$.

Proprietăţi. **1.** $\sin x=y\Leftrightarrow x=\arcsin y$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y\in[-1,1]$.

2. $\arcsin(\sin x)=x$, $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin(\arcsin y)=y$, $\forall y\in[-1,1]$.

3. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$, $\forall x\in[-1,1]$.

4. Pentru $x \in \mathbb{R}$ ecuaţia $\sin x = y$ are soluţii doar dacă $y \in [-1,1]$, iar mulţimea soluţiilor este egală cu $\{(-1)^k \arcsin y + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Dacă $\sin f(x) = \sin g(x)$, atunci $f(x) = (-1)^k g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Funcţia arccos $:[-1,1] \to [0,\pi]$ este inversa funcţiei $\cos:[0,\pi] \to [-1,1]$.

Proprietăţi. 1. $\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y,\ x \in [0,\pi],\ y \in [-1,1]$.

2. $\arccos(\cos x) = x,\ \forall x \in [0,\pi]$; $\cos(\arccos y) = y,\ \forall y \in [-1,1]$.

3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ \forall x \in [-1,1]$.

4. Pentru $x \in \mathbb{R}$ ecuaţia $\cos x = y$ are soluţii doar dacă $y \in [-1,1]$, iar mulţimea soluţiilor este egală cu $\{\pm \arccos y + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Dacă $\cos f(x) = \cos g(x)$, atunci $f(x) = \pm g(x) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \forall x \in [-1,1]$.

7. $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\ \forall x \in [-1,1]$.

Funcţia arctg $:\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ este inversa funcţiei $\mathrm{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

Proprietăţi. 1. $\mathrm{tg}\,x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg}\,y,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ y \in \mathbb{R}$.

2. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x) = x,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,y) = y,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

3. $\mathrm{arctg}\,(-x) = -\mathrm{arctg}\,x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Pentru $x \in \mathbb{R}$ ecuaţia $\mathrm{tg}\,x = y$ are soluţii pentru orice $y \in \mathbb{R}$, iar mulţimea soluţiilor este egală cu $\{\mathrm{arctg}\,y + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Dacă $\mathrm{tg}\,f(x) = \mathrm{tg}\,g(x)$, atunci $f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Funcţia arcctg $:\mathbb{R} \to (0,\pi)$ este inversa funcţiei $\mathrm{ctg}:(0,\pi) \to \mathbb{R}$.

Proprietăţi. 1. $\mathrm{ctg}\,x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{arcctg}\,y,\ x \in (0,\pi),\ y \in \mathbb{R}$.

2. $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\,x) = x,\ \forall x \in (0,\pi)$; $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,y) = y,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

3 $\mathrm{arcctg}\,(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\,x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Pentru $x \in \mathbb{R}$ ecuaţia $\mathrm{ctg}\,x = y$ are soluţii pentru orice $y \in \mathbb{R}$, iar mulţimea soluţiilor este egală cu $\{\mathrm{arcctg}\,y + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Dacă $\mathrm{ctg}\,f(x) = \mathrm{ctg}\,g(x)$, atunci $f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. $\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\,x) = \frac{1}{x}$ şi $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Probleme propuse

1. Calculaţi: *a)* $S = \sin^2 1^0 + \sin^2 2^0 + ... + \sin^2 90^0$;
b) $P = \sin 1^0 \cdot \sin 2^0 \cdot ... \cdot \sin 2011^0$.

2. Calculaţi: *a)* $S = \sin 1^0 + \sin 2^0 + ... + \sin 360^0$;
b) $P = \cos 1^0 \cdot \cos 2^0 \cdot ... \cdot \cos 2011^0$.

3. Calculaţi: *a)* $\mathrm{tg}\,1^0 \cdot \mathrm{tg}\,2^0 \cdot ... \cdot \mathrm{tg}\,89^0$;
b) $\cos 1^0 + \cos 2^0 + ... + \cos 179^0$.

4. Arătaţi că $\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$.

5. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathrm{tg}\,a = 2$. Calculaţi:
a) $\frac{\sin a + \cos a}{\sin a}$; *b)* $\frac{2\sin^2 a + 1}{\cos^2 a}$.

6. Calculaţi $a = \frac{\mathrm{tg}\,78^0 - \mathrm{tg}\,18^0}{1 + \mathrm{tg}\,78^0\,\mathrm{tg}\,18^0}$, $b = \sin 108^0 \cos 48^0 - \cos 108^0 \sin 48^0$.

7. Arătaţi că $\sin 40^0 \cdot \sin 140^0 = \cos^2 130^0$.

8. Calculaţi:
a) $\sin 75^0 \cos 15^0$; *b)* $\cos \frac{23\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$; *c)* $\sin \frac{\pi}{12}$.

9. Determinaţi cel mai mare element al mulţimii $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$.

10. Comparaţi numerele $\sin 1$ şi $\cos 1$.

11. Pentru $\sin a = \frac{3}{5},\ a \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, calculaţi: *a)* $\sin 2a$; *b)* $\mathrm{tg}\,a$.

12. Ştiind că $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ şi $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, calculaţi $\cos x$.
Bacalaureat 2011, model subiect MECTS

13. Fie x un număr real care verifică egalitatea $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x = 2$. Arătaţi că $\sin 2x = 1$.
Variante bacalaureat 2009

14. Fie mulţimea $A = \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea A, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$? *Bacalaureat* 2010.

15. Calculaţi $\frac{\sin x - \cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)},\ x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

16. Dacă $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin a + \cos a = \frac{1}{3}$, calculaţi $\sin 2a$.

17. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin a+\cos b=1$ şi $\cos a+\sin b=\frac{1}{2}$, calculaţi $\sin(a+b)$.

18. Pentru $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a-b=\frac{\pi}{4}$ arătaţi că $\mathrm{tg}b-\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b\cdot\mathrm{tg}a=-1$.

19. Arătaţi că $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

20. Determinaţi $x\in[0,\pi)$ ştiind că numerele $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ sunt în progresie aritmetică.

21. Calculaţi raza cercului înscris în triunghiul ABC ştiind că $AB=AC=5$ şi $BC=8$.

Examen Bacalaureat 2011

22. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=6$, $AC=4$ şi $A=\frac{2\pi}{3}$. Determinaţi.

a) Aria triunghiului ABC.

b) Perimetrul triunghiului ABC.

c) Raza cercului circumscris triunghiului ABC.

23. Se consideră triunghiul ABC. Arătaţi că dacă $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

24. Fie triunghiul ABC. Arătaţi că dacă $\cos^2 A+\cos^2 B=2\cos^2 C$, atunci $a^2+b^2=2c^2$.

25. Se consideră triunghiul ABC cu $A=\frac{\pi}{4}$ şi $B=\frac{\pi}{3}$. Calculaţi $\cos C$.

26. Se dă triunghiul ABC cu raza cercului circumscris $R=6$ şi $A=\frac{\pi}{6}$. Calculaţi BC.

27. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC=3$ şi $\cos A=\frac{1}{2}$.

28. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $a=3$, $b=3$ şi $c=4$. Calculaţi.

a) $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$; *b)* Raza cercului circumscris.

29. Se consideră triunghiul ABC în care $a+c=2b$. Arătaţi că $\sin A+\sin C=2\sin B$.

30. Arătaţi că dacă în triunghiul ABC este adevărată relaţia $a^2\sin 2B=\frac{abc}{R}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

31. Calculaţi sinusul unghiului ascuţit dintre diagonalele dreptunghiului $ABCD$, ştiind că $AB=6$ şi $BC=8$.

32. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=6$, $BC=4$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Aflaţi distanţa de la D la AC.

33. Determinaţi lungimea celei mai mici înălţimi a triunghiului ABC cu laturile 5,6 şi 7.

34. Determinaţi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic cu laturile în progresie aritmetică cu raţia 1.

35. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care are loc relaţia $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

Variante bacalaureat 2009

36. Fie ABC un triunghi cu $\mathrm{tg}A=2$, $\mathrm{tg}B=3$. Determinaţi măsura unghiului C.

Variante bacalaureat 2009

37. Determinaţi raza cercului înscris şi raza cercului circumscris unui triunghi cu laturile 3,4 şi 5.

38. Determinaţi numerele naturale a pentru care numerele a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

Variante bacalaureat 2009

39. Calculaţi:

a) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$; *c)* $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

d) $\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right)+\mathrm{arcctg}\left(\sqrt{2}\right)+\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{2}\right)$; *e)* $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

40. Calculaţi:

a) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; *b)* $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; *c)* $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

d) $\cos\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)$; *e)* $\mathrm{tg}(2\mathrm{arctg}\,3)$.

41. Rezolvaţi ecuaţiile.

a) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi]$; *b)* $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $\sin x+\cos x=1$, $x\in[0,2\pi)$; *d)* $\mathrm{tg}\,x=-\sqrt{3}$, $x\in(0,\pi)$;

e) $\sin 2x=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$. *f)* $\sin x=\cos x$, $x\in[0,4\pi]$;

g) $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in[-\pi,0]$.

42. Rezolvaţi ecuaţiile.

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\,x=\frac{\pi}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c) $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$, $x\in\mathbb{R}$.

d) $\sin x=1+\cos^2 x$, $x\in\mathbb{R}$.

e) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin x=\frac{\pi}{3}$, $x\in[-1,1]$.

Variante bacalaureat 2009

Partea 2
Algebră (clasele XI-XII)

Tema 2.1. Permutări. Matrice. Determinanţi
(clasa a XI-a)

Tema 2.2. Sisteme de ecuaţii liniare
(clasa a XI-a)

Tema 2.3. Structuri algebrice
(clasa a XII-a)

Tema 2.4. Polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ
(clasa a XII-a)

Tema 2.1

Permutări. Matrice. Determinanţi

1. Permutări

Definiţia 1. Fie n un număr natural nenul. O funcţie bijectivă $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2,..., n\}$ se numeşte *permutare* de grad n.

Mulţimea permutărilor de grad n conţine $n!$ elemente şi se notează S_n.

Exemplu de permutare. Funcţia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ este o permutare de grad 4. În acest caz $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$ şi $\sigma(4) = 2$.

Înmulţirea permutărilor. Fie σ şi τ două permutări de grad n. Permutarea $\sigma \circ \tau$, unde „$\circ$" este operaţia de compunere a funcţiilor se numeşte *produsul* permutărilor σ şi τ şi se notează $\sigma\tau$.

Proprietăţi

1. Înmulţirea permutărilor este asociativă, deci au sens expresii de forma $\sigma^k = \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdot \sigma \cdots \sigma}_{k \text{ ori}}$, pentru orice $\sigma \in S_n$ şi orice număr natural nenul k.

2. Permutarea $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ are proprietatea $\sigma e = e\sigma = \sigma$, pentru orice $\sigma \in S_n$, şi se numeşte permutarea identică.

3. Dacă $\sigma \in S_n$ atunci permutarea $\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$ se notează σ^{-1}, se numeşte inversa permutării σ şi are proprietatea $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Inversiuni, semnul unei permutări

Definiţia 2. Se numeşte *inversiune* a permutării $\sigma \in S_n$ o pereche ordonată $(i, j) \in \{1, 2, ... n\} \times \{1, 2, ...n\}$ cu $i < j$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Numărul inversiunilor unei permutări σ se notează $m(\sigma)$ iar numărul $(-1)^{m(\sigma)}$ se notează $\varepsilon(\sigma)$ şi se numeşte *semnul* permutării σ. Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$ (deci $m(\sigma)$ este par) atunci σ se numeşte *permutare pară*, iar dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$ (deci $m(\sigma)$ este impar) se numeşte *permutare impară*.

Proprietăţi

4. $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$ oricare ar fi $\sigma, \tau \in S_n$.

5. $\varepsilon(e) = 1$.

6. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ oricare ar fi $\sigma \in S_n$.

Exemplu. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Inversiunile permutării σ sunt $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (3,4), (3,5), (4,5)$, deci $m(\sigma) = 7$, $\varepsilon(\sigma) = -1$ şi σ este permutare impară.

Definiţia 3. Fie $i, j \in \{1, 2, 3,... n\}$ cu $i \neq j$. Permutarea $\sigma \in S_n$ cu proprietăţile: $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ şi $\sigma(k) = k$ pentru orice $k \in \{1, 2, 3,... n\} - \{i, j\}$ se numeşte *transpoziţie* şi se notează (ij).

Exemplu. $(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$.

Proprietăţi

7. $(ij) = (ji)$.
8. $(ij)^{-1} = (ij)$.
9. $(ij)^2 = e$.
10. Orice transpoziţie este o permutare impară.

2. Matrice

În cele ce urmează S reprezintă una din mulţimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, iar m şi n sunt două numere naturale nenule.

Definiţie 4. O funcţie $A : \{1, 2,... m\} \times \{1, 2,... n\} \to S$ se numeşte ***matrice*** cu m linii şi n coloane (sau de tip (m, n)) cu elemente din mulţimea S.

Imaginile unei astfel de funcţii se aşează într-un tablou (tablou de tip matriceal) cu m linii şi n coloane, în care elementul de pe linia i şi coloana j reprezintă imaginea perechii (i, j) prin funcţia A, element care se notează $a_{ij} \in S$.

Exemplu. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = -1$ şi $a_{23} = 1$.

Mulţimea matricelor de tip (m, n) cu elemente din mulţimea S se notează $\mathcal{M}_{m,n}(S)$. O matrice de tip (n, n) se numeşte matrice pătratică de ordin n, iar mulţimea lor se notează $\mathcal{M}_n(S)$.

Operaţii cu matrice

Adunarea matricelor. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Matricea $(a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$ se numeşte *suma* matricelor A şi B şi se notează $A + B$.

Înmulţirea cu scalari. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$ şi $x \in S$. Matricea $(xa_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$ se numeşte *produsul* matricei A cu scalarul x şi se notează xA.

Înmulţirea matricelor. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$ şi $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(S)$. Matricea $(c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(S)$ unde $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}$ pentru orice $i \in \{1, 2, ... m\}$ şi $k \in \{1, 2, ... p\}$ se numeşte *produsul* matricei A cu matricea B şi se notează AB.

Proprietăţi

Dacă operaţiile de mai jos au sens, atunci:

1. $(AB)C = A(BC)$, deci înmulţirea matricelor, acolo unde are sens, este asociativă.

2. $A(B + C) = AB + AC$ şi $(B + C)A = BA + CA$, deci înmulţirea matricelor este distributivă faţă de adunarea matricelor.

3. Înmulţirea matricelor este operaţie algebrică pe mulţimea $\mathcal{M}_n(S)$, adică produsul AB are sens pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(S)$ şi, în acest caz, $AB \in \mathcal{M}_n(S)$.

4. Matricea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(S)$ are proprietatea $AI_n = I_nA = A$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_n(S)$, şi se numeşte matricea unitate.

Observaţie. Cum, în general, $AB \neq BA$, calculul algebric nu respectă regulile obişnuite la numere. Astfel, de exemplu, $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Dacă $AB = BA$, cu $A, B \in \mathcal{M}_n(S)$, atunci $(AB)^k = A^kB^k$ şi $(A + B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i$.

Transpusa unei matrice. Transpusa matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$ este matricea $A^t = (b_{ji}) \in \mathcal{M}_{n,m}(S)$ unde $b_{ji} = a_{ij}$ pentru orice $i \in \{1, ... m\}$ şi $j \in \{1, ... n\}$.

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$ şi $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})$.

Teorema lui Hamilton-Cayley

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(S)$. Atunci $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (în general, matricea de tip (m, n) cu toate elementele egale cu 0 se notează $O_{m,n}$).

3. Determinanţi

Definiţia 5. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(S)$. Numărul $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ se numeşte *determinantul* matricei A şi se notează $\det(A)$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Un determinant de ordin n este determinantul unei matrice pătratice de ordin n.

• **Determinanţi de ordin doi.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

• **Determinanţi de ordin trei.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Proprietăţi. Fie $A \in \mathcal{M}_n(S)$. Atunci:

1. $\det(A) = \det(A^t)$. Datorită acestei propoziţii, orice proprietate a unui determinant referitoare la linii este adevărată şi pentru coloane.

2. Dacă A are o linie cu toate elementele egale cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

3. Dacă matricea B se obţine din A prin schimbarea locului a două linii, atunci $\det(B) = -\det(A)$.

4. Dacă A are două linii egale, atunci $\det(A) = 0$.

5. Dacă B se obţine din A prin înmulţirea elementelor unei linii cu un număr $\alpha \in S$, atunci $\det(B) = \alpha \det(A)$.

6. Dacă B se obţine din A prin adunarea liniei i cu linia j înmulţită cu un număr $\alpha \in S$, atunci $\det(B) = \det(A)$.

7. Δ_{ij} (minorul (ij)) este determinantul matricei obţinută din A prin suprimarea liniei i şi coloanei j. Numărul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ se numeşte *complementul algebric* al elementului a_{ij} din matricea A. Atunci $\det(A) = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in}$ (*dezvoltarea după linia i*).

8. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_n(S)$.

4. Aplicaţii ale determinanţilor

- **Ecuaţia unei drepte determinate de două puncte.**

Ecuaţia dreptei AB, unde $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$, este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

- **Aria unui triunghi.**

Pentru punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2,y_2)$ şi $C(x_3,y_3)$ se notează cu $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ şi cu S_{ABC} aria triunghiului ABC. Atunci: ***a)*** $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$;

b) A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

Probleme propuse

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma, \tau \in S_5$.

a) Calculaţi $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.
b) Calculaţi σ^6.

2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

a) Determinaţi inversiunile lui σ şi calculaţi $\varepsilon(\sigma)$.
b) Determinaţi σ^{-1}.

3. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$.

a) Determinaţi cel mai mic număr natural nenul k astfel încât $\sigma^k = e$.
b) Calculaţi σ^{2012}.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x \in S_4$.

4. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi σ^{-1}.
b) Arătaţi că $m(\sigma) = m(\sigma^{-1})$.
c) Arătaţi că ecuaţia $x^4 = \sigma$ nu are soluţii în S_6. *Bacalaureat*, 2008

5. Fie permutările $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $a,b \in S_5$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $ax = b, x \in S_5$.
b) Determinaţi cel mai mic număr natural nenul k astfel încât $(ab)^k = e$.
c) Fie $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b^k = e$. Arătaţi că 6 divide k. *Bacalaureat*, 2008

6. Considerăm permutările $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in S_4$.

a) Verificaţi dacă c este soluţia ecuaţiei $ax = xb$.
b) Arătaţi că $a^4 = b^4$.
c) Determinaţi o soluţie a ecuaţiei $xb^3 = a^3x, x \in S_4$.

Bacalaureat, 2009

7. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ şi mulţimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Determinaţi numărul inversiunilor lui σ.
b) Determinaţi numărul elementelor lui A.
c) Arătaţi că toate elementele lui A sunt permutări pare.

Bacalaureat, 2009

8. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi $A + B$, $2A$ şi $A - 2B$.
b) Calculaţi AB, BA şi A^2.

9. Fie matricele cu elemente reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Arătaţi că dacă $AB = BA$, atunci $A = B$.

10. Fie matricele cu elemente reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătaţi că $AB = (BA)^t$.

11. Fie matricea cu elemente reale $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătaţi că $X + X^2 + \ldots + X^{100} = O_2$.

12. Fie matricea $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $X+X^2+...+X^{10}$.

13. Fie matricele cu elemente reale $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$. Determinați valorile reale ale numărului a pentru care $AB=BA$.

14. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3.

b) Calculați $(I_3-A)(I_3+A+A^2)$.

15. Fie matricele $A=(1\quad 2\quad 3)\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ și $B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculați AB și BA.

b) Calculați $(BA)^n, n\in\mathbb{N}^*$.

16. Pentru o matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ notăm cu $\text{tr}(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

a) Arătați că $\text{tr}(\alpha A)=\alpha\,\text{tr}(A)$, oricare ar fi $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $\alpha\in\mathbb{C}$.

b) Arătați că $\text{tr}(A+B)=\text{tr}(A)+\text{tr}(B)$.

17. Demonstrați teorema lui Hamilton-Cayley: $A^2-\text{tr}(A)A+\det(A)I_2=O_2$, oricare ar fi $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

18. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A)=0$. Arătați că $A^n=(\text{tr}(A))^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

19. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $A^{2012}=O_2$. Arătați că $A^2=O_2$.

20. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}\\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

21. Calculați $\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}^{2013}$.

22. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 1 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

23. Fie matricea $M=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Calculați $M^n, n\in\mathbb{N}^*$.

24. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculați $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

25. Rezolvați ecuația $X^2=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

26. Rezolvați ecuația $X^3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

27. Rezolvați ecuația $X^3=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

28. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA$.

b) Calculați $(A-A^t)^{2008}$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

29. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Calculați $\det(A^2-5A-I_2)$.

30. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -5 & -3\end{pmatrix}$.

a) Verificați egalitatea $\det(A)=\det(B)$.

b) Demonstrați că $A^n-B^n=(2^n-1)(A-B)$, oricare ar fi numărul $n\geq 1$ natural.

Adaptare *bacalaureat*, 2011

31. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(AA^t)$.

b) Arătați că $\det(A^tA)=0$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

32. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $\det(A^tA)\geq 0$.

b) Arătați că dacă $AA^t=A^tA$ atunci $(a-d)(b-c)=0$.

33. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Demonstrați că $A^2-A-2I_3=O_3$.

34. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Demonstrați că $A^2-A-2I_3=O_3$.

35. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $AB=BA=O_3$.

b) Demonstrați că $(A+B)^{2013}=A^{2013}+B^{2013}$.

36. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^4.

b) Dacă $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $BE_1=E_1B$ și $BE_2=E_2B$ arătați că $B=aI_2$, cu $a\in\mathbb{R}$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

37. Fie $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$.

a) Fie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $AX=XA$. Arătați că există $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$.

b) Arătați că $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt&-\sin nt\\\sin nt&\cos nt\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați A^{2008}.

Bacalaureat, 2009

38. Calculați complementul algebric al elementului egal cu 1 din matricea $\begin{pmatrix}-1&2&4\\-2&1&5\\-4&-2&0\end{pmatrix}$.

39. Calculați determinantul $\begin{vmatrix}1+i&1-i&0\\1-i&1+i&0\\1&1&i\end{vmatrix}$.

40. Dezvoltați după prima coloană determinantul $\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-1&3&5\\1&0&-2&4\\0&1&1&-3\end{vmatrix}$.

41. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix}x-3&x&x\\x&x-3&x\\x&x&x-3\end{vmatrix}=0$.

42. *a)* Arătați că $V_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(c-b)(c-a)(b-a)$.

b) Arătați că $V_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

43. Calculați $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$ și $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$.

44. Fie numerele reale *a, b, c*, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+2x+3$ și determinanții $A=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\f(a)&f(b)&f(c)\end{vmatrix}$.

a) Arătați că $A=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

b) Arătați că $A=B$.

c) Arătați că pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, de pe graficul funcției *f*, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

Bacalaureat, 2009

45. Fie punctele $A(0, 6), B(1, 4)$ și $C(-1, 8)$.

a) Arătați că punctele *A, B, C* sunt coliniare.

b) Scrieți ecuația dreptei AC.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

46. Fie punctele $A(0, 1), B(1, 2)$ și $C(2,4)$.

a) Scrieți ecuația dreptei AB.

b) Calculați aria triunghiului ABC.

47. Fie punctele $A(1, 0), B(2,-1), C(3,a)$. Determinați valorile reale lui *a* pentru care aria triunghiului *ABC* este egală cu 1.

48. Fie punctele $A(-1, 0)$, $B(1,-1)$, $C(a,a+3)$, unde *a* este un număr întreg.

a) Demonstrați că punctele A,B,C nu sunt coliniare pentru nicio valoare a lui *a*.

b) Determinați valorile lui *a* pentru care aria triunghiului *ABC* este egală cu 1.

49. Fie punctele $A(-1, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3,5)$ și $D(2,2)$.

a) Demonstrați că punctele B,C,D sunt coliniare.

b) Demonstrați că aria triunghiului *ABD* este egală cu aria triunghiului *ACD*.

50. Se consideră punctele $P_k(a_k,b_k)$, $k=1,2,3$ și matricea $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $\det(AA^t)\geq 0$, oricare ar fi punctele P_1,P_2,P_3.

b) Demonstrați că $\det(AA^t)=0$ dacă și numai dacă punctele P_1,P_2,P_3 aparțin unei drepte care trece prin origine.

Adaptare *bacalaureat*, 2010

Tema 2.2
Sisteme de ecuații liniare

1. Matrice inversabile

Definiția 1. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește *inversabilă* dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA = I_n$.

Dacă pentru o matrice A există o matrice B cu proprietatea din definiție, atunci B este unică cu această proprietate, se notează cu A^{-1} și se numește *inversa* matricei A.

Teorema 1. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$.

Calculul inversei unei matice. Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se notează cu A^* matricea transpusă a complemenților algebrici ai elementelor matricei A. Matricea A^* se numește *adjuncta* lui A.

Dacă $\det(A) \neq 0$, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^*$.

Exemplul 1. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Dacă $\det(A) \neq 0$, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^* = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Observații. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă.

1. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.
3. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, adică matricea A^{-1} nu are neapărat elemente întregi.

2. Ecuații matriceale

Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice inversabile și $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) Ecuația $AX = C$, $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are soluția unică $X = A^{-1}C$.

b) Ecuația $XB = C$, $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are soluția unică $X = CB^{-1}$.

c) Ecuația $AXB = C$, $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are soluția unică $X = A^{-1}CB^{-1}$.

3. Sisteme liniare

Definiție 2. Sistemul $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$, se numește *sistem liniar* cu m ecuații și n necunoscute (sau de tip (m, n)).

Prin *soluție* a sistemului înțelegem un n-uplu ordonat $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ cu proprietatea că numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică cele m ecuații ale sistemului. Matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (adică matricea coeficienților necunoscutelor) se numește *matricea sistemului.*

Definiția 3. Un sistem liniar de tip (m, n) și matrice A se numește *sistem* Cramer dacă $m = n$ și matricea sistemului este inversabilă.

Teoremă 2. Un sistem Cramer are soluție unică. Soluția $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a unui sistem Cramer se determină astfel: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, unde Δ este determinantul matricei A a sistemului, iar Δ_i este determinantul matricei obținută din A prin înlocuirea coloanei „i" cu coloana $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ a termenilor liberi.

- **Rangul unei matrice**

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $1 \leq k \leq \min(m, n)$. Un determinant obținut din determinantul lui A prin suprimarea a $m - k$ linii și $n - k$ coloane se numește *minor* de ordinul k al matricei A.

Exemplu 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \\ 4 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = |1|$ este minor de ordinul 1.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ este minor de ordinul 2 și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -7 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ este minor de ordin 3.

Definiție 4. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A \neq O_{m,n}$ și $1 \leq r \leq \min(m, n)$. Numărul r se numește *rangul* lui A dacă:

a) există un minor nenul de ordinul r;
b) toți minorii de ordin strict mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Rangul matricei $O_{m,n}$ este 0.

Proprietăți

1. $r = \text{rang}(A) \Leftrightarrow$ *a)* există un minor nenul de ordin k, *și*
b) toți minorii de ordin $r + 1$ (dacă există) sunt nuli.

2. $r = \text{rang}(A) \Leftrightarrow$ *a)* există Δ un minor nenul de ordin r, *și*
b) toți bordații lui Δ (dacă există) sunt nuli. (Un bordat al lui Δ este un minor de ordinul $r + 1$ obținut din adăugarea la Δ a elementelor unei linii și ale unei coloane disponibile din A).

Exemplu 3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Rangul lui A este 2 pentru că $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, iar bordații lui Δ_p sunt $\Delta_{(33)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ și $\Delta_{(34)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

• Sisteme liniare

Definiţie 5. Un sistem liniar se numeşte *compatibil* dacă are soluţii. Dacă soluţia este unică, el se numeşte *compatibil determinat*, iar în caz contrar *compatibil nedeterminat*. Un sistem liniar fără soluţii se numeşte *incompatibil*.

Dacă A este matricea unui sistem liniar cu coloana termenilor liber $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, atunci matricea obţinută prin adăugarea la A a coloanei b, se notează $\overline{A}$ şi se numeşte *matricea extinsă* a sistemului.

Teorema 2 (Kronecker-Capelli). Un sistem liniar de matrice A este compatibil dacă şi numai dacă $\text{rang}(A)=\text{rang}(\overline{A})$.

• Stabilirea compatibilităţii. Fie un sistem liniar de tip (m, n).

– Se determină $r=\text{rang}(A)$ şi fie Δ_p un minor nenul de ordin r (*minor principal*).

– Dacă $r<m$, se calculează bordaţii lui Δ_p cu elementele fiecărei linii disponibile din A şi coloana termenilor liberi (*minorii caracteristici*). Atunci $\text{rang}(\overline{A})=\text{rang}(A) \Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli (*Teorema lui Rouché*)

• Rezolvarea sistemelor compatibile. Fie un sistem liniar de tip (m, n) şi matrice A, $r=\text{rang}(A)=\text{rang}(\overline{A})$ şi Δ_p un minor principal al lui A.

– Liniile (coloanele) corespunzătoare lui Δ_p se numesc *linii (coloane) principale* ale lui A. Restul se numesc *linii (coloane) secundare*.

– Ecuaţiile corespunzătoare liniilor secundare se numesc *ecuaţii secundare* şi se suprimă.

– Necunoscutele corespunzătoare coloanelor secundare se numesc *necunoscute secundare* şi se trec în membrul drept ca parametrii.

– Pentru fiecare valoare a parametrilor se obţine un sistem Cramer care se rezolvă.

– Dacă $r=n$, atunci sistemul nu are necunoscute secundare şi este compatibil determinat. În caz contrar este compatibil nedeterminat.

• Sisteme omogene

Definiţie 6. Un sistem liniar se numeşte *omogen* dacă toţi termenii liberi sunt nuli.

Proprietăţi. Fie un sistem liniar de tip (m, n), de matrice A.

3. Un sistem omogen este compatibil. El are soluţia $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, numită *soluţia nulă*.

4. Un sistem omogen are soluţii nenule $\Leftrightarrow$ este compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A)<n$.

5. Dacă $m=n$, atunci sistemul are soluţii nenule $\Leftrightarrow \det(A)=0$.

• Metoda lui Gauss

Sistemele liniare (S) şi (S') cu acelaşi număr de necunoscute se numesc echivalente dacă au aceleaşi soluţii.

Deoarece schimbarea locului ecuaţiilor într-un sistem liniar (S) transformă sistemul într-unul echivalent putem presupune că $a_{11}\neq 0$. Pentru fiecare $i\in\{2,3,\ldots,m\}$ înmulţim prima ecuaţie cu $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ şi o adunăm cu ecuaţia „i". În acest fel, în ecuaţiile 2, 3,... m necunsocuta x_1 are coeficientul 0.

Păstrăm prima ecuaţie şi continuăm procedeul, atât cât este posibil, pentru celelalte necunoscute. Se obţine în final un sistem pentru care stabilirea compatibilităţii este imediată.

Exemple.

4. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=4 \\ -x+3y-z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y+3z=0 \\ 5y-2z=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=2 \\ y-z=0 \\ 5y-2z=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=2 \\ y-z=0 \\ 3z=3 \end{cases}.$

Sistemul are soluţie unică: $x=1, y=1, z=1$.

5. $\begin{cases} x+2y-z+t=2 \\ 2x+y+3z-2t=1 \\ 3x+3y+2z-t=4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z+t=2 \\ -3y+5z-4t=-3 \\ -3y+5z-4t=-2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z-t=2 \\ -3y+5z-4t=-3 \\ 0=1 \end{cases}$. Sistemul este incompatibil.

6. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2x+y+z=4 \\ 3x-3y-3z=-9 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3y+3z=6 \\ -6y-6z=-12 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$. Fie $z=\alpha$. Sistemul devine $\begin{cases} x+y=1-\alpha \\ y=2-\alpha \end{cases}$ şi are soluţiile $(-1, 2-\alpha, \alpha), \alpha\in\mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Determinaţi inversa matricei $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

3. Determinaţi inversa matricei $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$.

4. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Arătaţi că $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(A)=\pm 1$.

5. Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculaţi A^{-1}.

6. Arătaţi că matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice valoare reală a lui m.

7. Fie $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA + bI_3$.
c) Calculați A^{-1}.

8. Determinați inversa matricei $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

9. Rezolvați ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) $X\begin{pmatrix}4&7\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

10. Determinați valorile reale a lui m știind că matricea $A=\begin{pmatrix}m&1\\2&-1\end{pmatrix}$ are inversa egală cu adjuncta sa.

11. Determinați inversa adjunctei matricei $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

12. Rezolvați ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

b) $X\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&4\\-5&8\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

13. Rezolvați sistemul $\begin{cases}x+3y+5z=4\\2x+y-3z=3\\5x-2y+7z=3\end{cases}$.

14. Rezolvați sistemul $\begin{cases}x+y+z=3\\-x+2y-2z=9\\x+4y+4z=27\end{cases}$.

15. Rezolvați sistemul $\begin{cases}2x-3y+5z=9\\x+y-2z=-2\\3x+2y+z=7\end{cases}$.

16. Rezolvați sistemul $\begin{cases}3x+y+4z=-1\\x+3y-2z=5\\4x+3y+7z=2\end{cases}$.

17. Rezolvați sistemul $\begin{cases}4x-y-4z=-1\\x+5y-4z=-1\\2x+y-z=3\end{cases}$.

18. Rezolvați sistemul $\begin{cases}x+y-4z=-2\\-7x+3y+2z=-2\\5x-4y+z=2\end{cases}$.

19. Determinați rangul matricei $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\4&4&0\end{pmatrix}$.

20. Determinați rangul matricei $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\1&2&4&0\\3&6&2&6\end{pmatrix}$.

21. Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care rangul matricei $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\4&0&a&1\\5&2&3&b\end{pmatrix}$ este egal cu 2.

22. Determinați rangul matricei $A=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&2&1&2\\2&1&2&1\end{pmatrix}$.

23. Determinați valorile reale a lui m pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-1&1\\2&-1&m\end{pmatrix}$ are rangul 2.

24. Determinați rangul matricei $\begin{pmatrix}1&-1&3&0\\2&-3&-1&-1\\3&2&a&5\end{pmatrix}$ în funcție de $a\in\mathbb{R}$.

25. Determinați rangul matricei $\begin{pmatrix}1&2&-1&0&3\\3&1&a&4&-1\\4&3&2&b&2\end{pmatrix}$ în funcție de $a,b\in\mathbb{R}$.

26. Determinați rangul matricei $\begin{pmatrix}1&-1&2&1&3\\3&2&a&b&5\\2&-2&1&c&0\end{pmatrix}$ în funcție de $a,b,c\in\mathbb{R}$.

27. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculaţi rangul matricei A.

b) Arătaţi că există matricele $K \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ şi $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = K \cdot L$.

c) Arătaţi că există $d \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = dA$.

Bacalaureat, 2009

28. Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi A^3.

b) Aflaţi rangul matricei $I_3 + A + A^t$.

c) Determinaţi inversa matricei $I_3 + A$.

Bacalaureat, 2008

29. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi rangul matricei A^*.

b) Arătaţi că ecuaţia $AX = B$ are o infinitate de soluţii $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

30. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $\det(A)$.

b) Arătaţi că $\operatorname{rang}(A) \geq 2, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

31. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $AB + BA$.

b) Arătaţi că $\operatorname{rang}(A+B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

c) Arătaţi că $(A+B)^n = A^n + B^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

32. Arătaţi că sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x+2y=1 \\ 5x-y=6 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$ este incompatibil.

33. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ ax + 3y + 2z = 0 \\ (a+1)x + y + z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Arătaţi că pentru orice valoare a lui a sistemul are soluţie unică.

34. Determinaţi toate valorile reale ale lui m pentru care sistemul $\begin{cases} mx + y + mz = 1 \\ x + y + mz = 3 \\ 3x - y - 2z = 12 \end{cases}$ este incompatibil.

35. Arătaţi că pentru orice valoare reală a lui m sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ -x + y + 2z = m \\ x + 4y + m^2 z = -3 \end{cases}$ are soluţie unică.

36. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + y + z = b + 1 \\ 2x + y + z = b \\ x + ay - z = -1 \end{cases}$ are cel puţin două soluţii.

37. Arătaţi că sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = -1 \end{cases}$ are o infinitate de soluţii.

38. Aflaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + 2ay + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ este compatibil nedeterminat.

39. Fie sistemul $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = m \\ nx + y - 2z = 4 \end{cases}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi m şi n pentru care sistemul admite soluţie $x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 1$.

b) Determinaţi $n \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

c) Determinaţi m şi n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

Bacalaureat, 2009

40. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m - 1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

41. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul admite soluţia (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0 = t_0 = 0$.

b) Determinați $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar rangul matricei sistemului este egal cu 2.

Bacalaureat, 2008

42. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.
b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

43. Fie $m \in \mathbb{R}$ și sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + my + mz = -2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$ și A matricea sistemului.

a) Calculați det(A).
b) Arătați că rang(A) $\neq 2$ oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
c) Determinați valorile lui m pentru care sistemul este incompatibil.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

44. Fie sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x - y - 2z = b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a și b pentru care sistemul are soluția (1, 1, 1).
b) Determinați a și b pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
c) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, există $b \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul admite soluții cu toate componentele întregi.

Bacalaureat, 2009

45. Fie sistemul $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ și A matricea sistemului.

a) Arătați că sistemul este compatibil determinat, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

46. Fie sistemul $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 7x - y + az = b \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și A matricea sistemului.

a) Determinați valorile lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
b) Determinați valorile lui a și b pentru care sistemul este incompatibil.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

47. Fie sistemul $\begin{cases} x + py + p^2 z = p^3 \\ x + qy + q^2 z = q^3 \\ x + ry + r^2 z = r^3 \end{cases}$, unde $p, q, r \in \mathbb{C}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.
b) Rezolvați sistemul în cazul în care p, q, r sunt distincte două câte două.

c) Arătați că dacă (–1, 1, 1) este soluție a sistemului, atunci cel puțin două din numere p, q, r sunt egale.

Bacalaureat, 2008

48. Fie sistemul omogen $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.
b) Determinați valorile lui m pentru care sistemul are soluții nenule.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

49. Fie A matricea sistemului $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați det(A).
b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluții nenule.
c) Pentru $m = 0$, arătați că $\dfrac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nebanală (x_0, y_0, z_0) a sistemului.

Bacalaureat, 2009

50. Fie sistemul $\begin{cases} x + ay + (b + c)z = 0 \\ x + by + (c + a)z = 0 \\ x + cy + (a + b)z = 0 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.
b) Arătați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, sistemul are soluții nenule.
c) Rezolvați sistemul știind că $a \neq b$ și $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului.

Bacalaureat, 2008

Tema 2.3
Structuri algebrice

1. Grupuri

În cele ce urmează G reprezintă o mulţime nevidă.

Definiţie 1. Se numeşte *lege de compoziţie internă* (*operaţia algebrică*) pe G o funcţie „$*$": $G\times G\to G$.

• pentru fiecare pereche $(a,b)\in G\times G$, imaginea $*((a,b))$ se notează $a*b$.

• perechea $(G,*)$ reprezintă o mulţime nevidă G şi o lege de compoziţie internă „$*$" pe G.

Definiţie 2. Fie $(G,*)$. O submulţime nevidă H a lui G se numeşte *parte stabilă* a lui G în raport cu legea „$*$" dacă $x*y\in H$, oricare a fi $x,y\in H$.

• dacă $G=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ este o mulţime finită şi „$*$" o lege de compoziţie internă pe G, matricea $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ cu $a_{ij}=a_i*a_j$ se numeşte tabla operaţiei „$*$" pe G.

Exemplu: $G=\{0,1,2,3\}$ şi $a*b=|a-b|$. Tabla operaţiei „$*$" pe G este

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

Definiţie 3. Perechea $(G,*)$ se numeşte *grup* dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

a) Legea „$*$" este *asociativă*, adică $(x*y)*z=x*(y*z)$, oricare ar fi $x,y,z\in G$.

b) Legea „$*$" are *element neutru*, adică există $e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x$, oricare ar fi $x\in G$.

c) Toate elementele lui G sunt simetrizabile, adică pentru orice $x\in G$ există $x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$. (x' se numeşte *simetricul* lui x).

Grupul $(G,*)$ se numeşte *grup comutativ* (*abelian*) dacă legea „$*$" este comutativă, adică $x*y=y*x$, oricare ar fi $x,y\in G$.

Exemple de grupuri:

• grupuri numerice: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$, $(\{-1,1\},\cdot)$.

• grupuri de matrice: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),+)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}),+)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),+)$.

• grupuri de permutări: $(S_n,\cdot)$.

Definiţie 4. Fie $(G_1,*)$ şi $(G_2,\circ)$ două grupuri. O funcţie $f:G_1\to G_2$ se numeşte *morfism de grupuri* (sau simplu *morfism*) dacă $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ oricare ar fi $x,y\in G$.

Dacă morfismul $f:G_1\to G_2$ este funcţie bijectivă atunci f se numeşte *izomorfism*. În acest caz spunem că cele două grupuri sunt *izomorfe*.

Proprietatea 1.

Dacă $(G_1,*)$, $(G_2,\circ)$ sunt două grupuri şi $f:G_1\to G_2$ este morfism atunci:

a) $f(e_1)=e_2$, unde e_1 şi e_2 sunt elementele neutre din G_1 şi respectiv G_2.

b) $f(x')=(f(x))'$ oricare ar fi $x\in G_1$, unde x' este simetricul lui x în G_1, iar $(f(x))'$ este simetricul lui $f(x)$ în G_2.

Exemplu de izomorfism: Fie $(G_1,*)=(\mathbb{R},+)$, $(G_2,\circ)=((0,\infty),\cdot)$ şi $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=2^x$. Cum $f(x+y)=2^{x+y}=2^x\cdot 2^y=f(x)\cdot f(y)$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$ şi f este bijectivă, rezultă că f este izomorfism.

Definiţia 5. Fie grupul $(G,*)$ şi H o submulţime nevidă a lui G. H se numeşte *subgrup* al grupului $(G,*)$ dacă:

a) $x*y\in H$ oricare ar fi $x,y\in H$.

b) $x'\in H$ oricare ar fi $x\in H$, unde x' este simetricul lui x în grupul G.

Exemple de subgrupuri

1. $\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Q},+)$.

2. Dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$, atunci $H=\{e,\sigma,\sigma^2\}$ este subgrup al grupului $(S_4,\cdot)$.

Proprietăţi: Fie grupul $(G,*)$ şi $H\subset G$, $H\neq\varnothing$.

2. Dacă H este subgrup al grupului $(G,*)$, atunci $(H,*)$ este grup şi cele două grupuri au acelaşi element neutru.

3. H este subgrup al grupului $(G,*)$ dacă şi numai dacă $x*y'\in H$ oricare ar fi $x,y\in H$, unde y' este simetricul lui y în grupul G.

4. Dacă H este mulţime finită, atunci H este subgrup al grupului $(G,*)$ dacă şi numai dacă H este parte stabilă a lui G în raport cu legea „$*$".

În cele ce urmează $(G,\cdot)$ este *grup finit*, adică G este mulţime finită.

Teorema lui Lagrange. Dacă H este subgrup al lui G, atunci numărul elementelor lui H divide numărul elementelor lui G.

Proprietatea 5. Fie $x\in(G,\cdot)$. Există un număr natural nenul n astfel încât $x^n=e$, unde e este elementul neutru al grupului G şi $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ ori}}$.

Definiţie 6. Fie $x\in G$. Cel mai mic numărul natural nenul k cu proprietatea că $x^k=e$ se numeşte *ordinul* lui x în G şi se notează $\text{ord}(x)$.

Exemplu: Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5\end{pmatrix}\in S_5$. Cum $\sigma^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ şi $\sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=e$, rezultă că $\text{ord}(\sigma)=3$.

Proprietăţi: Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu *n* elemente, $x\in G$ şi $k=\text{ord}(x)$.

6. $x^p=e,\ p\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k|p$.

7. $H(x)=\{e,x,x^2,...,x^{k-1}\}$ este subgrup cu *k* elemente al lui *G*.

8. $k|n$.

9. $x^n=e$.

2. Inele şi corpuri

În cele ce urmează *A* reprezintă o mulţime nevidă, iar „$*$" şi „$\circ$" sunt două legi de compoziţie interne pe *A*.

Definiţie 7. Tripletul $(A,*,\circ)$ se numeşte *inel* dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $(A,*)$ este grup comutativ.

2. *a)* Legea „$\circ$" este asociativă.

b) Legea „$\circ$" are element neutru.

3. Legea „$\circ$" este distributivă faţă de legea „$*$", adică $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ şi $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$, oricare ar fi $x,y,z\in A$.

Inelul $(A,*,\circ)$ se numeşte *inel comutativ* dacă legea „$\circ$" este comutativă.

Exemple de inele

1. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

2. $(\mathcal{M}_n(A),+,\cdot)$ unde *A* este unul din inelele $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.

În inelul $(A,*,\circ)$, legea „$*$" se numeşte *adunare* şi se notează cu „+", iar legea „$\circ$" se numeşte *înmulţire* şi se notează cu „$\cdot$". Elementul neutru al adunării se notează O_A, iar elementul neutru al înmulţirii se notează 1_A.

Definiţie 8. Inelul $(A,+,\cdot)$ se numeşte *corp* dacă $0_A\neq 1_A$ şi orice $x\in A$, $x\neq 0_A$ este simetrizabil în raport cu înmulţirea.

Simetricul elementului $x\in A-\{0_A\}$ în raport cu înmulţirea se notează x^{-1} şi se numeşte *inversul* lui *x*.

Exemple de corpuri:

1. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

2. $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot)$ unde $d\in\mathbb{Q}$, $d>0$, $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{d})=\{a+b\sqrt{d}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$.

Definiţie 9. Fie inelele $(A_1,+,\cdot)$ şi $(A_2,+,\cdot)$. O funcţie $f:A_1\to A_2$ se numeşte *morfism de inele* dacă:

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, oricare ar fi $x,y\in A_1$.

b) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in A_1$.

c) $f(1_{A_1})=1_{A_2}$.

În condiţiile de mai sus, dacă A_1 şi A_2 sunt corpuri atunci *f* se numeşte *morfism de corpuri*.

Un morfism de inele *f* se numeşte *izomorfism* dacă *f* este funcţie bijectivă.

Exemple de morfism de inele (corpuri)

$f:(\mathbb{C},+,\cdot)\to(\mathbb{C},+,\cdot)$, $f(z)=\bar{z}$. Într-adevăr,

a) $f(z_1+z_2)=\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=f(z_1)+f(z_2)$,

b) $f(z_1\cdot z_2)=\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=f(z_1)\cdot f(z_2)$ oricare ar fi $z_1,z_2\in\mathbb{C}$,

c) $f(1)=\bar{1}=1$.

Inelul claselor de resturi modulo *n*

Pentru un număr natural *n*, $n\geq 2$ şi un număr întreg *a*, se notează cu *a* (mod *n*) restul împărţirii lui *a* la *n*.

Pentru fiecare $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$ mulţimea $\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a(\text{mod}\,n)=k\}$ se notează $\hat{k}$, iar mulţimea $\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},...,\widehat{n-1}\}$ se notează cu $\mathbb{Z}_n$. Inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ unde $\hat{a}+\hat{b}=\widehat{a+b}$ şi $\hat{a}+\hat{b}=\widehat{ab}$ oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$ se numeşte *inelul claselor de resturi modulo n*.

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $a\in\mathbb{Z}$. Atunci elementul $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_n$ dacă şi numai dacă $(a,n)=1$. Mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ se notează $U(\mathbb{Z}_n)$. Cum $U(\mathbb{Z}_n)=\mathbb{Z}_n-\{\hat{0}\}$ dacă şi numai dacă *n* este număr prim, rezultă că $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ este corp dacă şi numai dacă *n* este număr prim.

Exemple:

1. $U(\mathbb{Z}_9)=\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$ şi $\hat{1}^{-1}=\hat{1}$, $\hat{2}^{-1}=\hat{5}$, $\hat{4}^{-1}=\hat{7}$, $\hat{5}^{-1}=\hat{2}$, $\hat{7}^{-1}=\hat{4}$ şi $\hat{8}^{-1}=\hat{8}$.

2. $U(\mathbb{Z}_5)=\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ şi $\hat{1}^{-1}=\hat{1}$, $\hat{2}^{-1}=\hat{3}$, $\hat{3}^{-1}=\hat{2}$, $\hat{4}^{-1}=\hat{4}$.

Probleme propuse

1. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-5$.

a) Arătaţi că mulţimea $H=\mathbb{Z}\cap[5,\infty)$ este stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$\circ$".

b) Arătaţi că legea „$\circ$" este asociativă.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=\sqrt[5]{x^5+y^5-1}$.

a) Arătaţi că legea „$\circ$" este asociativă.

b) Arătaţi că legea „$\circ$" are element neutru.

3. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

a) Verificaţi că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că mulţimea $(-1,\infty)$ este stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$".

Simulare bacalaureat, 2002

4. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea „$*$" definită prin $x*y=2xy-6x-6y+21$.

a) Arătaţi că mulţimea $(3,\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

b) Arătaţi că legea „$*$" este asociativă.

c) Determinaţi elementul neutru al legii „$*$". *Bacalaureat*, 2000

5. Pe mulţimea numerelor raţionale se defineşte legea asociativă „$\circ$" prin $x\circ y=\frac{1}{2}(xy+2x+2y)$.

a) Arătaţi că mulţimea $H=\mathbb{Q}\cap[-2,\infty)$ este stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu legea „$\circ$".

b) Arătaţi că legea „$\circ$" are element neutru.

c) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{Q}$ în raport cu legea „$\circ$".

6. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=xy-6x-6y+a$, unde a este un număr real.

a) Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care legea „$\circ$" este asociativă.

b) Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care legea „$\circ$" are element neutru.

7. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=xy+5x+5y+a$, unde a este un număr întreg.

a) Determinaţi valorile întregi ale lui a pentru mulţimea $\mathbb{Z}-\{-5\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$\circ$".

b) Determinaţi valorile întregi ale lui a pentru care legea „$\circ$" are element neutru.

8. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=5xy+6x+6y+a$, unde a este un număr întreg.

a) Arătaţi că pentru $a=6$, legea „$\circ$" este asociativă.

b) Arătaţi că pentru $a\neq 6$, legea „$\circ$" nu are element neutru.

9. Pe intervalul $(0,2)$ se defineşte legea asociativă „$\circ$" prin $x\circ y=\frac{xy}{2-x-y+xy}$.

a) Arătaţi că legea „$\circ$" are element neutru.

b) Arătaţi că toate elementele din $(0,2)$ sunt simetrizabile în raport cu legea „$\circ$".

10. Pe intervalul $(0,\infty)$ se defineşte legea „$\circ$" prin $x\circ y=\sqrt[3]{x^{\log_3 y}}$.

a) Determinaţi elementul neutru al legii „$\circ$".

b) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui $(0,\infty)$ în raport cu legea „$\circ$".

11. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea asociativă „$\circ$" prin $x\circ y=-3xy+7x+7y-14$.

a) Arătaţi că $e=2$ este elementul neutru al legii „$\circ$".

b) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$\circ$".

12. Fie mulţimea $G=\{A\in M_2(\mathbb{R})\,|\,A\cdot A'=I_2\}$ unde A' este transpusa matricei A.

a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup. Adaptare *bacalaureat*, 2007

13. Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}\in S_5$ şi $G=\{\sigma^n\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$.

a) Determinaţi numărul elementelor lui G.

b) Alcătuiţi tabla înmulţirii permutărilor pe G.

c) Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup, unde „$\cdot$" este înmulţirea permutărilor.

14. Se consideră mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\Big|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Arătaţi că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Arătaţi că oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$, numărul a^2+1 nu se divide cu 3.

c) Arătaţi că dacă $A\in M$, atunci $\det(A)\neq -1$.

d) Arătaţi că dacă $A\in M$ şi $A^{-1}\in M$, atunci $\det(A)=1$. *Bacalaureat*, 2007

15. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+xy$.

a) Arătaţi că legea este asociativă.

b) Calculaţi $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}$. Adaptare *bacalaureat*, 2008

16. Pe mulţimea $(0,\infty)$ se defineşte legea $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$.

a) Arătaţi că $(x\circ y)\circ z=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}$ oricare ar fi $x,y,z\in(0,\infty)$.

b) Arătaţi că legea „$\circ$" este asociativă.

c) Calculaţi $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}$. Adaptare *bacalaureat*, 2009

17. Se consideră mulţimea de funcţii $G=\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\}$.

a) Demonstraţi că operaţia de compunere a funcţiilor de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ este lege de compoziţie pe G.

b) Arătaţi că G este grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

18. Pe mulţimea $G=(0,\infty)$ se consideră legea de compoziţie $x*y=x^{\log_3 y}$.

a) Arătaţi că dacă $x,y\in(0,\infty)$ şi $x*y=1$, atunci $x=1$ sau $y=1$.

b) Arătaţi că $H=(0,\infty)-\{1\}$ este grup în raport cu operaţia „$*$".

19. Fie mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix}1&\ln a&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}\Big|\,a>0\right\}$.

a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor pătratice de ordinul 3.

b) Demonstraţi că G este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

20. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 4x\\ -x & 1-2x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul doi.

c) Calculați $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

21. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție dată de $x*y=xy-5x-5y+30$ și mulțimea $G=(5,\infty)$.

a) Determinați $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*\alpha=\alpha*x=\alpha$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

d) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.

e) Calculați $1*2*3*...*2012$.

f) Arătați că $\underbrace{x*x*x*...*x}_{n \text{ ori}}=(x-5)^n+5$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Adaptare *bacalaureat*, 2010

22. Se consideră pe $\mathbb{Z}$ legea de compoziție dată de $x*y=6xy+6x+6y+a$, unde a este un număr întreg.

a) Determinați valorile întregi ale lui a pentru care legea „$*$" este asociativă.

b) Arătați că legea nu are element neutru pentru nicio valoare întreagă a lui a.

c) Determinați valorile întregi ale lui a pentru care $((-1)*2)*((-1)*2013)=a$.

d) Pentru $a=5$, calculați $1*2*3*...*2013$.

e) Pentru $a=5$, determinați valorile întregi ale lui p astfel încât $x*p=p$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

f) Pentru $a=5$, calculați $x*x*x=287$.

23. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea „$*$" definită prin $x*y=-2xy+3x+3y+a$, unde a este un număr real

a) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $(1*2)*3=1*(2*3)$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care legea „$*$" este asociativă.

c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care legea „$\circ$" are element neutru.

d) Determinați valorile reale ale lui a pentru care mulțimea $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

e) Pentru $a=-3$, arătați că mulțimea $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ este grup în raport cu legea „$*$".

f) Pentru $a=-3$, calculați $1*2*3*...*2013$.

24. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea „$*$" definită prin $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+a}$, unde a este un număr real.

a) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $1*2=0$.

b) Arătați că legea „$*$" este asociativă pentru orice valoare reală a lui a.

c) Arătați că legea „$*$" are element neutru pentru orice valoare reală a lui a.

d) Pentru $a=2$, arătați că mulțimea $\mathbb{R}$ este grup în raport cu legea „$*$".

e) Pentru $a=3$, calculați $(-1)*0*1*2*3*4$.

f) Pentru $a=4$, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x*x*x*x*x=1$.

25. Fie grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R},*)$, unde legea „$*$" este definită prin $x*y=x+y+7$.

a) Arătați că funcția $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},*), f(x)=x-7$, este izomorfism de grupuri.

b) Calculați $1*2*3*...*10$.

26. Fie grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R},\circ)$, unde legea „$\circ$" este definită prin $x\circ y=x+y+3$.

a) Determinați valorile reale ale numerelor a și b astfel încât funcția $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},\circ)$, $f(x)=ax+b$ să fie morfism de grupuri.

b) Calculați $x_1\circ x_2\circ...\circ x_n$, unde n este un număr natural nenul și $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$.

27. Fie grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $(\mathbb{R},\circ)$, unde legea „$\circ$" este definită prin $x\circ y=x+y-1$.

a) Arătați că funcția $f:(\mathbb{R},\circ)\to((0,\infty),\cdot), f(x)=e^{x-1}$ este izomorfism de grupuri.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x\circ x\circ x=5$.

28. Considerăm grupurile $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ și $(\mathbb{R}-\{-1\},\circ)$, unde legea „$\circ$" este definită prin $x\circ y=xy+x+y$.

a) Arătați că funcția $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(\mathbb{R}-\{-1\},\circ)$, $f(x)=x-1$ este izomorfism de grupuri.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x\circ x\circ x\circ x=1$.

29. Fie grupurile $(\mathbb{R}-\{2\},\circ)$ și $(\mathbb{R}-\{1\},*)$, unde legile „$\circ$" și „$*$" sunt definite prin $x\circ y=xy-2x-2y+6$ și $x*y=xy-x-y+2$.

a) Determinați elementele neutre ale legilor „$\circ$" și „$*$".

b) Determinați valorile reale ale numărului a astfel încât funcția $f:(\mathbb{R}-\{2\},\circ)\to(\mathbb{R}-\{1\},*)$, $f(x)=x+a$ să fie morfism de grupuri.

30. Fie grupurile $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}^*$, $f(x)=7^x$.

a) Arătați că f este morfism de grupuri.

b) Arătați că f nu este izomorfism.

31. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea $x*y=xy-4x-4y+20$ și mulțimea $G=(4,\infty)$.

a) Arătați că $(G,*)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

b) Arătați că $(G,*)$ este grup.

c) Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+4$ este izomorfism de la grupul $((0,\infty),\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

32. Considerăm grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $((-2,2),*)$, unde legea „$*$" este definită prin $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$.

a) Arătați că funcția $f:((0,\infty),\cdot)\to((-2,2),*)$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$ este izomorfism de grupuri.

b) Rezolvați în $(-2,2)$ ecuația $x*x*x=1$.

33. Fie mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4^x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătați că $A\cdot B\in G$, oricare ar fi $A,B\in G$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 3.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to G$, $f(x)=A(x)$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(G,\cdot)$.

34. Fie mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & 15x\\ -x & 1-3x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Arătați că $A(x)A(y)=A(2xy+x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 2.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to G, f(x)=A\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ la grupul $(G,\cdot)$.

35. Fie mulțimea $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A)=1\}$.

Arătați că G este subgrup al grupului matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

36. Fie n un număr natural nenul și mulțimea $U_n=\{z\in\mathbb{C} \mid z^n=1\}$.

a) Arătați că U_n este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

b) Demonstrați că dacă H este subgrup cu n elemente al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$, atunci $H=U_n$.

37. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}\in S_5$ și $H=\{\sigma^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că H este subgrup al grupului $(S_5,\cdot)$.

b) Determinați ordinul lui σ în grupul $(S_5,\cdot)$.

38. Fie numărul complex $\varepsilon=\cos\dfrac{5\pi}{7}+i\sin\dfrac{5\pi}{7}$.

a) Calculați ε^{42}.

b) Determinați ordinul lui ε în grupul U_{42}.

c) Arătați că mulțimea $H=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^{13}\}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

39. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile „$\circ$" și „$*$" sunt definite prin $x\circ y=xy+x+y$ și $x*y=x+y+a$, unde a este un număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care legea „$\circ$" este distributivă față de legea „$*$".

40. Se consideră inelul $(\mathbb{Z},*,\circ)$ unde $x*y=x+y+2$ și $x\circ y=xy+2x+2y+2$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Arătați că $x\circ y=-2 \Leftrightarrow x=-2$ sau $y=-2$.

b) Determinați elementele inversabile ale inelului.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$ este izomorfism de la inelul $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z},*,\circ)$.

41. Pe intervalul $(0,\infty)$ se consideră legea „$*$" definită prin $x*y=x^{\log_2 y}$. Arătați că $((0,\infty),\cdot,*)$ este corp, unde legea „$\cdot$" este înmulțirea numerelor reale.

42. Se consideră inelul $(\mathbb{Q},\perp,\top)$ unde $x\perp y=x+y-5$ și $x\top y=xy-5x-5y+30$.

a) Determinați elementul neutru al legii $\perp$.

b) Arătați că inelul $(\mathbb{Q},\perp,\top)$ este corp.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=x+5$ este izomorfism de la corpul $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ la corpul $(\mathbb{Q},\perp,\top)$.

d) Calculați $x_1\top x_2\top x_3\top\ldots\top x_n$, cu $n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{Q}$.

43. Determinați elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_{10},+,\cdot)$.

44. Considerăm inelul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12}),+,\cdot)$.

a) Arătați că $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A)\in\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\widehat{11}\}$.

b) Determinați inversa matricei $B=\begin{pmatrix}\hat{5} & \hat{4}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$.

45. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

b) Determinați numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

46. Fie mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \middle| X=\begin{pmatrix}a & \hat{2}b\\ b & a\end{pmatrix}\right\}$.

a) Arătați că mulțimea $H=G-\{O_2\}$ este subgrup al grupului matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

b) Rezolvați ecuația $X^2=I_2$, $X\in G$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

47. Fie corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ și $H=\{x^2 \mid x\in\mathbb{Z}_7\}$.

a) Arătați că $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$.

b) Demonstrați că $\{x^{2000} | x\in\mathbb{Z}_7\}=H$.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

48. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii *M*.

b) Arătați că $AB\in M$, oricare ar fi $A,B\in M$.

c) Demonstrați că *M* este subgrup al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$.

Bacalaureat, 2009

49. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ și corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$.

a) Rezolvați în corpul $\mathbb{Z}_7$ ecuația $\hat{3}x^2+\hat{4}=\hat{0}$.

b) Determinați ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$.

c) Arătați că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ care să verifice relația $f(\hat{2})=\hat{3}$.

Bacalaureat, 2009

50. Se consideră mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix}m & n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| m,n\in\mathbb{Z}_5,\ m=\pm\hat{1}\right\}$.

a) Arătați că *H* este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 2.

b) Determinați numărul elementelor de ordin 2 din grupul $(H,\cdot)$.

Tema 2.4

Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$)

1. Inelul polinoamelor

În cele ce urmează *K* reprezintă unul din corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\mathbb{Z}_p$ cu *p* prim. Dacă *X* este un obiect care nu este *K*, atunci o expresie de forma $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$, cu $n\in\mathbb{N}$ și $a_0,a_1,...,a_n\in K$, se numește *polinom* în nedeterminata *X* cu coeficienți în *K*. Mulțimea acestor polinoame se notează $K[X]$. Dacă $f\in K[X]$, atunci scrierea $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$ se numește *forma algebrică* a polinomului *f*, iar elementele $a_0,a_1,...,a_n\in K$ se numesc *coeficienții* polinomului *f*. Două polinoame din $K[X]$ sunt egale dacă au aceiași coeficienți. Cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a expresiilor algebrice, $K[X]$ este inel, numit inelul polinoamelor în nedeterminata *X* cu coeficienți în *K*. Polinomul având toți coeficienții nuli se numește *polinomul nul* și se notează 0.

• Gradul unui polinom

Polinomul $f=a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+...+a_1X+a_0\in K[X]$ are *gradul n* dacă $a_n\neq 0$ și $a_k=0$ pentru $k>n$. Scriem $\text{grad}(f)=n$. În acest caz a_n se numește coeficientul dominant al lui *f* și scriem $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$. Polinomul 0 are prin definiție gradul $-\infty$.

Proprietăți

1. grad $(f+g)\le$ max (grad *f*, grad *g*), pentru orice $f,g\in K[X]$.

2. grad $(fg)=$ grad $(f)+$ grad (g), pentru orice $f,g\in K[X]$.

• Funcția polinomială a unui polinom

Dacă $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0\in K[X]$, atunci funcția $\tilde{f}:K\to K$ definită prin $\tilde{f}(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ se numește *funcția polinomială* atașată lui *f*.

Dacă $a\in K$, elementul $\tilde{f}(a)\in K$ se numește *valoarea polinomului f* în punctul *a* și se notează $f(a)$.

• Teorema împărțirii cu rest. Pentru $f,g\in K[X]$, $g\neq 0$, există și sunt unice polinoamele *c* și $r\in K[X]$ astfel încât $f=gc+r$ și $\text{grad}(r)<\text{grad}(g)$.

În acest caz polinoamele *c* și *r* se numesc câtul și respectiv restul împărțirii lui *f* la *g*.

• Împărțirea la $X-a$, $a\in K$

Proprietatea 3. Restul împărțirii lui $f\in K[X]$ la $X-a$ este $f(a)$.

Schema lui Horner. Câtul și restul împărțirii lui $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$ la $X-a$ se pot determina după următoarea schemă:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
a	a_n	aa_n+a_{n-1}	$ab_{n-2}+a_{n-2}$	....	ab_1+a_1	ab_0+a_0
	‖	‖	‖		‖	‖
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_0	r

Câtul este $c=b_{n-1}X^{n-1}+b_{n-2}X^{n-2}+...+b_1X+b_0$, iar restul este $r=b_0=f(a)$.

Exemplu 1. $f=4X^4-3X^3+2X-5, g=X+1$

	4	–3	0	2	–5
–1	4	–7	7	–5	0

deci $c=4X^3-7X^2+7X-5$ şi $r=0$.

Divizibilitatea polinoamelor

Definiţie 1. Fie $f,g\in K[X]$. Spunem că g divide f dacă există $c\in K[X]$ astfel încât $f=gc$, adică restul împărţirii lui f la g este egal cu 0 – pentru $g\neq 0$. Scriem $g\mid f$.

Definiţia 2. Fie $f,g\in K[X]$. Polinomul $d\in K[X]$ se numeşte *un cel mai mare divizor comun* al f şi g dacă

a) $d\mid f$, şi *b)* $d_1\mid f$
$d\mid g$ $\quad d_1\mid g \Rightarrow d_1\mid d,\ d_1\in K[X]$.

Definiţia 3. Fie $f,g\in K[X]$. Polinomul $m\in K[X]$ se numeşte *un cel mai mic multiplu comun* al lui f şi g dacă

a) $f\mid m$ şi *b)* $f\mid h$
$g\mid m$ $\quad g\mid h \Rightarrow m\mid h,\ h\in K[X]$.

Proprietăţi

4. Pentru orice două polinoame $f,g\in K[X]$ există un c.m.m.d.c. şi un c.m.m.m.c.

5. $d\in K[X]$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi $g \Leftrightarrow a\cdot d$ cu $a\in K^*$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g. Analog pentru c.m.m.m.c.

2. Rădăcinile polinoamelor

Definiţie 4. $a\in K$ se numeşte *rădăcină* a lui $f\in K[X]$ dacă $f(a)=0$.

Teorema lui Bézout: a este rădăcină a lui $f \Leftrightarrow X-a\mid f$, deci dacă există $g\in K[X]$ cu $f=(X-a)g$.

Un polinom $f\in K[X]$ de grad n, $f\neq 0$, are cel mult n rădăcini în K. Un polinom $f\in\mathbb{C}[X]$ de grad n, $f\neq 0$, are n rădăcini în $\mathbb{C}$. Singurul polinom care are mai multe rădăcini decât gradul său este polinomul 0.

Relaţiile lui Viète. Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X]$, $a_n\neq 0$. Notăm cu $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f. Atunci:

$$\begin{cases} s_1=x_1+x_2+...+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ s_2=x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ s_3=x_1x_2x_3+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \dots\dots\dots \\ s_n=x_1x_2x_3\dots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

În general, folosim notaţia $S_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$, unde k este un număr natural nenul (sau $k\in\mathbb{Z}$, dacă $a_0\neq 0$). Avem $S_1=s_1, S_2=s_1^2-2s_2$.

Exemple

2. Fie $f=2X^3-4X^2-5X+3$ şi $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale. Atunci

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{-4}{2}=2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{-5}{2} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

3. Fie $f=X^4+2X^2+3X-3$ şi $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale. Atunci

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=2 \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-3 \\ x_1x_2x_3x_4=-3 \end{cases}.$$

• Polinoame cu coeficienţi reali, raţionali, întregi

Proprietăţi

7. Dacă polinomul f are toţi coeficienţii reali şi are rădăcina $z\in\mathbb{C}$, atunci are şi rădăcina $\bar{z}$. Numărul rădăcinilor din $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ ale lui f este număr par.

8. Dacă polinomul f are toţi coeficienţii raţionali şi are rădăcina $a+b\sqrt{d}$, unde $a, b, d\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{d}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, atunci f are şi rădăcina $a-b\sqrt{d}$.

9. Fie polinomul $f=a_nX^n+...+a_1X+a_0$, cu $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{Z}$, $a_n\neq 0$, şi numerele $p,q\in\mathbb{Z}$, $(p,q)=1$. Dacă $\alpha=\dfrac{p}{q}$ este rădăcină a polinomului f, atunci $p\mid a_0$ şi $q\mid a_n$.

• Ecuaţii binome. Ecuaţia $x^n-a=0$, $a=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\in\mathbb{C}$, are soluţiile

$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, $k=\overline{0, n-1}$.

• **Ecuaţii reciproce**. Polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ se numeşte *reciproc* dacă $a_k = a_{n-k}$ pentru orice $k = \overline{0, n}$. În acest caz ecuaţia $f(x)=0$ se numeşte ecuaţie *reciprocă*.

Proprietăţi

10. Produsul a două polinoame reciproce, câtul şi restul împărţirii a două polinoame reciproce sunt polinoame reciproce.

11. Un polinom reciproc de grad impar are rădăcina $x_0 = -1$. Pentru a afla rădăcinile unui polinom reciproc f de grad $2k+1$, se împarte f la $X+1$ şi câtul este un polinom reciproc g de grad $2k$. Ecuaţia $g(x)=0$ se împarte cu x^k şi se face substituţia $x+\dfrac{1}{x}=t$.

Exemplu 4. $f = X^5 - 3X^4 + X^3 + X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

Din schema lui Horner

	1	–3	1	1	–3	1
–1	1	–4	5	–4	1	0

rezultă că $f = (X+1)g$, unde $g = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 1$. Avem $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 5x - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2 - 4t + 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$, unde $t = x + \dfrac{1}{x}$. Rezultă $t_1 = 1$ şi $t_2 = 3$, iar cele 4 rădăcini ale lui g rezultă din rezolvarea ecuaţiilor $x+\dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ şi $x + \dfrac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$.

• **Polinoame ireductibile**

Definiţie 5. Un polinom $f \in K[X]$ de grad mai mare sau egal decât 1 se numeşte ireductibil dacă nu există $g, h \in K[X]$ cu $f = gh$ şi $\text{grad}(g) \geq 1$, $\text{grad}(h) \geq 1$.

Proprietăţi

12. Orice polinom $f \in K[X]$ de grad 1 este ireductibil.

13. Un polinom $f \in K[X]$ cu $\text{grad}(f) \geq 2$ care are o rădăcină în K este reductibil.

14. Un polinom $f \in K[X]$ cu gradul 2 sau 3 este ireductibil dacă şi numai dacă nu are rădăcini în K.

15. Un polinom $f \in K[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă polinomul af este ireductibil, oricare ar fi $a \in K^*$.

Observaţii

1. $f \in \mathbb{C}[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă $\text{grad}(f) = 1$.

2. $f \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$ dacă şi numai dacă $\text{grad}(f) = 1$ sau $\text{grad}(f) = 2$ şi $\Delta < 0$.

Teoremă. Fie $f \in K[X]$ cu $\text{grad}(f) \geq 1$. Atunci există în mod unic polinoamele ireductibile $g_1, g_2, ..., g_n \in K[X]$ astfel încât $f = g_1 g_2 \cdots g_n$, unicitatea fiind până la ordinea factorilor şi asociere în divizibilitate (g este asociat în divizibilitate cu h dacă există $a \in K^*$ astfel încât $g = ah$).

Probleme propuse

1. Determinaţi gradul polinomului $f = (a^2-1)X^4 + (a-1)X^2 + (a+2)X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ în funcţie de $a \in \mathbb{C}$.

2. Aflaţi câtul şi restul împărţirii polinomului $f = 3X^4 + 4X^3 + X^2 + 2X - 3$ la polinomul $g = X^2 + X - 2$.

3. Fie $f = (X^2+X+1)^{20} + (X^2-X+1)^{20}$ şi $f = a_{40}X^{40} + a_{39}X^{39} + ... + a_0$ forma sa algebrică.

a) Calculaţi $f(1)$. *b)* Determinaţi $a_0 + a_{40}$.

4. Determinaţi restul împărţirii lui $f = (X^3 + 3X^2 - 5X + 2)^{30}$ la $X - 1$.

5. Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care resturile împărţirii polinomului $f = X^3 + 2X^2 + aX - 1$ la $X+1$ şi $X-2$ sunt egale.

6. Determinaţi, folosind eventual schema lui Horner, câtul şi restul împărţirii polinomului $f = X^5 + 4X^3 - 2X + 5$ la:

a) $X+1$; *b)* $X-2$.

7. Determinaţi restul împărţirii polinomului $f = X^{30} - 4X^3 + X + 5$ la polinomul $X^2 - 1$.

8. Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care polinomul $f = X^4 - 3X^3 + aX^2 + X + 5$ se divide cu $X+1$.

9. Determinaţi valorile reale ale lui a şi b pentru care polinomul $X^2 + X + 2$ divide polinomul $f = X^4 + X^3 + 3X^2 + aX + b$.

10. Fie $f = X^4 + X^2 + 1$ şi $g = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. Determinaţi un c.m.m.d.c. al lui f şi g şi un c.m.m.m.c. al lui f şi g.

11. Fie $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 7 \in \mathbb{C}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

Calculaţi: *a)* $x_1 + x_2 + x_3$.

b) $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + \dfrac{1}{x_2x_3}$.

12. Fie $f = X^3 + 5X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{C}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

Calculaţi: *a)* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$,

c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

13. Fie $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Calculaţi:

a) $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)$,

b) $\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\left(\frac{1}{x_3}-1\right)\left(\frac{1}{x_4}-1\right)$.

14. Fie $f = X^3 - X^2 + 3X - 5 \in \mathbb{C}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Calculaţi:

a) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$,

b) $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.

15. Fie $f = (X^2 + X + 1)^{40} + (X^2 - X + 1)^{40}$ şi $f = a_{80}X^{80} + a_{79}X^{79} + ... + a_1X + a_0$ forma sa algebrică. Calculaţi:

a) a_{15}.

b) $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{80}$.

c) $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{80}$.

16. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

a) Determinaţi *a, b, c* ştiind că f are rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 = -2$.

b) Să se arate că dacă *f* are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci f are o rădăcină raţională.

c) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci f nu are rădăcini întregi.

Bacalaureat, 2008

17. Fie $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Determinaţi x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 3$ şi $b = 0$.

b) Arătaţi că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 32a^2 - 120$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

18. Fie polinomul $f = X^4 - 5X^2 + 4$.

a) Determinaţi rădăcinile lui f.

b) Determinaţi polinomul $h \in \mathbb{Q}[X]$ cu $h(0) = 1$ şi care are ca rădăcini inversele rădăcinilor lui *f*.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

19. Fie polinomul $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1$ cu $a \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Calculaţi $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

b) Determinaţi restul împărţirii lui *f* la $(X - 1)^2$.

c) Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Bacalaureat, 2008

20. Fie polinomul $f = aX^4 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) Arătaţi că numărul $f(3) - f(1)$ este par.

b) Arătaţi că $x - y$ divide $f(x) - f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

21. Fie polinomul $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $X^2 - 1$ divide *f*.

b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

22. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 45 \in \mathbb{Z}[X]$ şi $\hat{f} = X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Arătaţi că $\hat{f}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$.

b) Arătaţi că *f* nu se poate scrie ca produs de două polinoame cu coeficienţi întregi, neconstante.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

23. Fie polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) Calculaţi $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

b) Pentru $a = \hat{2}$, determinaţi rădăcinile lui *f* din $\mathbb{Z}_3$.

c) Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care *f* este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Bacalaureat, 2008

24. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 1)^{10} + (X - 2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.

a) Descompuneţi *g* în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

b) Demonstraţi că polinomul *g* nu divide polinomul f.

c) Determinaţi restul împărţirii lui f la g.

Bacalaureat, 2006

25. Fie $f = X^4 + mX^2 + n$ cu $m, n \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Determinaţi *m* şi *n* ştiind că $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

b) Determinaţi valorile lui *m* pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

c) Pentru $m = n = 1$, descompuneţi f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Bacalaureat, 2009

26. Fie polinoamele $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$, unde *a* şi *b* sunt două numere reale.

a) Determinaţi valorile lui *a* şi *b* pentru care *g* divide f.

b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ descompuneţi f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Bacalaureat, 2008

27. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Determinaţi câtul şi restul împărţirii lui f la $X^2 - 1$.

b) Verificaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $f(3^x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Bacalaureat, 2009

28. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 - 2X + 1$ cu $a \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Calculaţi $(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)(1 - x_4^2)$.

b) Determinaţi valorile reale ale lui *a* pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 8$.

29. Fie polinomul $f = X^3 - 3X + m$ cu $m \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

a) Pentru $m = 2$ determinaţi rădăcinile lui f.

b) Calculaţi $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

c) Determinaţi valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care f are toate rădăcinile întregi.

Bacalaureat, 2009

30. Fie $f=2X^3-4X^2+aX+1$ cu $a\in\mathbb{Z}$. Determinați valorile întregi ale lui a pentru care f are cel puțin o rădăcină rațională.

31. Se consideră polinoamele cu coeficienți complecși $f=X^4-1$ și $g=X^6-1$.

a) Determinați un c.m.m.d.c. și un c.m.m.m.c. pentru f și g.

b) Determinați numărul soluțiilor distincte din $\mathbb{C}$ ale ecuației $f(x)g(x)=0$.

Adaptare *bacalaureat*, 2009

32. Determinați restul împărțirii polinomului $f=X^{120}+X^4+3X^2+X+5$ la polinomul:

a) $g=X^3-1$.

b) $h=X^2+X+1$.

c) $t=X^5-1$.

33. Determinați restul împărțirii polinomului $f=X^{50}+20X^3+5X^2+7X+1$ la polinomul $g=(X+1)^2$.

34. Determinați restul împărțirii polinomului $f=X^{30}(X+1)^{20}$ la polinomul $g=X(X-1)^2$.

35. Fie $c\in\mathbb{C}[X]$ câtul împărțirii polinomului $f=X^{60}-30X^2+X+8$ la polinomul $g=(X-1)^2$. Calculați $c(-1)$.

36. Se consideră polinomul cu coeficienți complecși $f=X^4-5X^3+3X^2-X+1$ și $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Determinați un polinom $g\in\mathbb{C}[X]$, de grad 4, care are rădăcinile $1/x_1, 1/x_2, 1/x_3, 1/x_4$.

b) Arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

37. Se consideră polinomul cu coeficienți complecși $f=X^4-2X^3+X^2+X-1$ și $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$.

b) Arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

38. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^4+2aX^3+3bX^2+cX+d$ și $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Calculați $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2+(x_4+1)^2$.

b) Știind că polinomul f are toate rădăcinile reale și $a=b=2$, determinați valorile lui c și d.

39. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^3-pX^2+qX-r$, cu $p,q,r>0$.

a) Arătați că polinomul f are o rădăcină reală strict pozitivă.

b) Știind că polinomul f are toate rădăcinile reale și $p=3, r=1$, determinați valoarea lui q.

40. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^4+aX^3+aX^2+bX+c$, unde $a\in\left(0,\frac{8}{3}\right)$. Arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

41. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^4+4X^3+5X^2-6X+a$, unde $a\in[9,\infty)$. Arătați că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

42. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^3+aX^2+aX+1$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

43. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^3-12X+m$. Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

44. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^4+2X^3+aX^2-2X+1$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

45. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=(X^2+X+2)^{30}+(X^2-X+3)^{30}$ și $f=a_{60}X^{60}+a_{59}X^{59}+\ldots+a_0$ forma sa algebrică.

a) Determinați a_1.

b) Arătați că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

46. Determinați mulțimea valorilor întregi ale lui a pentru care polinomul $f=X^3+X^2+aX+1$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

47. Se consideră polinomul $f=X^3+\hat{2}X^2+X+a\in\mathbb{Z}_3[X]$. Arătați că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_3$, polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_3$.

48. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+X+a\in\mathbb{Z}_5[X]$. Determinați $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

49. Se consideră polinomul $f=X^8+\hat{4}X^3+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

b) Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

50. Se consideră polinomul $f=X^4+X^3+X+\hat{2}\in\mathbb{Z}_3[X]$.

a) Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_3$.

b) Determinați un polinomul $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$, având aceeași funcție polinomială ca f.

Analiză matematică 3

Clasele XI-XII

Tema 3.1	Limite de şiruri. Limite de funcţii. Funcţii continue. Funcţii derivabile
Tema 3.2	Primitive
Tema 3.3	Funcţii integrabile

Tema 3.1

Limite de şiruri. Limite de funcţii. Funcţii continue. Funcţii derivabile

1. Şiruri de numere reale

Şiruri mărginite

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit superior* dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit inferior* dacă există . $m \in \mathbb{R}$. astfel încât $x_n \geq m$, $\forall n \geq 1$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit* dacă este mărginit inferior şi superior.

Observaţie. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă există $M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Şiruri monotone

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este *crescător* (strict crescător) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$), $\forall n \geq 1$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ e *descrescător*(strict descrescător) dacă $x_n > x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \geq 1$.

Limite de şiruri. Şiruri convergente/divergente Criterii de convergenţă

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are *limita* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ (scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$) dacă orice vecinătate a lui λ conţine toţi termenii şirului începând de la un anumit rang. Un şir este *convergent* dacă are limită finită; în caz contrar şirul este *divergent*.

Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită. Un şir care conţine două subşiruri cu limite diferite este divergent.

1. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

2. Criteriul majorării. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu termeni pozitivi, convergent la zero şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietatea că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x_n - \lambda| \leq a_n$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$.

Consecinţă (0□M). Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent la zero şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = 0$.

3. Criteriul cleştelui. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ trei şiruri astfel încât $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lambda$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$.

4. Teorema lui Weierstrass. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

5. Criteriul raportului. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu termeni strict pozitivi astfel încât există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda$. Dacă $0 \leq \lambda < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar dacă $\lambda > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

6. Lema Cesaro-Stolz. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit. Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

Limite remarcabile de şiruri

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+...+a_1n+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+...+b_1n+b_0}=\begin{cases}\infty\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a_p}{b_q}\right), & p>q\\ \frac{a_p}{b_q}, & p=q\\ 0, & p<q\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}+\infty, & q>1\\ 1, & q=1\\ 0, & q\in(-1,1)\\ \text{nu există}, & q\le -1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

2. Limite de funcţii

Mulţimea punctelor de acumulare a unei mulţime nevide $D\subset\mathbb{R}$ se notează D'.

Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are *limita* $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$ în punctul $a\in D'$ (scriem $\lim_{x\to a}f(x)=\lambda$) dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\ge1}\subset D\setminus\{a\}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, atunci $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$.

Teoremă. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie elementară şi $a\in D$. Atunci $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Criteriul cu limite laterale. Dacă $a\in\mathbb{R}$ este punct de acumulare al mulţimilor $D\cap(-\infty,a)$ şi $D\cap(a,+\infty)$, funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are limita $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$ în punctul a dacă şi numai dacă f are limită la stânga şi la dreapta în a şi $\lim_{x\nearrow a}f(x)=\lim_{x\searrow a}f(x)=\lambda$.

Limite fundamentale. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$

Asimptote orizontale. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare al lui D. Dreapta de ecuaţie $y=a$, unde $a\in\mathbb{R}$, este *asimptotă orizontală* la graficul funcţiei spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$ (respectiv $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$).

Asimptote oblice. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$, respectiv $-\infty$, este punct de acumulare al lui D. Dreapta de ecuaţie $y=mx+n$, unde $m,n\in\mathbb{R}$, $m\ne0$, este *asimptotă oblică* la graficul funcţiei spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) dacă

$$\begin{cases}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m\\ \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n\end{cases}\text{ şi respectiv }\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m\\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=n\end{cases}.$$

Asimptote verticale. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare al lui D. Dreapta de ecuaţie $x=a$ este *asimptotă verticală la stânga* (respectiv *dreapta*) pentru graficul funcţiei f dacă $\lim_{x\nearrow a}f(x)=\pm\infty$ (respectiv $\lim_{x\searrow a}f(x)=\pm\infty$).

3. Funcţii continue

Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul $a\in D$ dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\ge1}\subset D$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, atunci $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$.

Dacă $a\in D\cap D'$, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

O funcţie $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă pe D dacă este continuă în fiecare punct $a\in D$.

Continuitate laterală. Dacă $a\in D$ este punct de acumulare pentru $(-\infty,a)\cap D$, se spune că f este *continuă la stânga* în a dacă $\lim_{x\nearrow a}f(x)=f(a)$ (altfel scris $f(a-0)=f(a)$).

Dacă $a\in D$ este punct de acumulare pentru $(a,+\infty)\cap D$, se spune că f este *continuă la dreapta* în a dacă $\lim_{x\searrow a}f(x)=f(a)$ (altfel scris $f(a+0)=f(a)$).

Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul $a\in D\cap D'$ dacă şi numai dacă f este continuă la stânga şi la dreapta în a, adică dacă şi numai dacă $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$.

Puncte de discontinuitate. $a\in D$ este punct de discontinuitate de speţa I al funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ dacă are limite laterale finite în a şi nu este continuă în a. Dacă cel puţin una din limitele laterale nu există sau este $\pm\infty$, a este punct de discontinuitate de speţa a II-a.

Operaţii cu funcţii continue. Dacă funcţiile $f,g:D\to\mathbb{R}$ sunt continue în punctul $a\in D$, atunci $\alpha f+\beta g,\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R}),\ f\cdot g,\ |f|,\ \max(f,g),\min(f,g)$ sunt funcţii continue în a, iar dacă $g(a)\ne0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în a.

Fie funcţiile $f:D\to E$ şi $g:E\to\mathbb{R}$. Dacă f este continuă în $a\in D$, iar g este continuă în $b=f(a)\in E$, atunci funcţia $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ este continuă în a. Avem $\lim_{x\to a}g(f(x))=g\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)$ (o funcţie continuă comută cu limita).

Proprietatea lui Darboux. O funcţie $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă pentru orice $x_1,x_2\in I$ şi orice λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există $c\in(x_1,x_2)$ astfel încât $f(c)=\lambda$.

O funcţie $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă imaginea oricărui interval prin funcţia f este tot un interval (cu alte cuvinte, pentru orice interval $J\subset I$, mulţimea $f(J)$ este interval).

O funcţie cu proprietatea lui Darboux nu are puncte de discontinuitate de speţa I.

Teoremă. Orice funcţie continuă $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

Proprietăţi ale funcţiilor continue.

1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(a)\cdot f(b)<0$. Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$.
2. O funcţie continuă, care nu se anulează pe un interval I, are semn constant pe I.
3. **Teorema lui Weierstrass.** O funcţie continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este mărginită şi îşi atinge marginile (adică există $u,v\in[a,b]$ astfel încât $f(u)=\min f(x)$ şi $f(v)=\max f(x)$).
4. O funcţie continuă $f:I\to\mathbb{R}$ este injectivă dacă şi numai dacă este strict monotonă.
5. Dacă $f:I\to J$ este o funcţie continuă şi bijectivă, atunci $f^{-1}:J\to I$ este continuă.

4. Funcţii derivabile

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are derivată în punctul $a \in D \cap D'$ dacă există limita $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}}$ (numită derivata funcţiei *f* în punctul $x = a$).

Dacă $f'(a) \in \mathbb{R}$, se spune că *f* este derivabilă în punctul $x = a$. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe D dacă este derivabilă în orice punct $a \in D$. În acest caz, funcţia $x \to f'(x)$, $x \in D$, se numeşte derivata funcţiei *f*.

Teoremă. Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Derivate laterale. Dacă $a \in D$ este punct de acumulare pentru $(-\infty, a) \cap D$, se spune că *f* are *derivată la stânga* în *a* dacă există limita $\lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{not}{=} f_s'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă $a \in D$ este punct de acumulare pentru $(a, +\infty) \cap D$, se spune că *f* are *derivată la dreapta* în *a* dacă există limita $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{not}{=} f_d'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are derivată în $a \in D \cap D'$ dacă şi numai dacă *f* are derivate laterale egale în *a*. În acest caz, $f_s'(a) = f_d'(a) = f'(a)$.

Interpretarea geometrică a derivatei. Derivata unei funcţii (derivabile!) într-un punct este egală cu panta tangentei la graficul funcţiei în acel punct.

Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, atunci *ecuaţia tangentei* la graficul funcţiei *f* în punctul de abscisă $x = a$ este $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

Puncte unghiulare, de întoarcere, de inflexiune. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă dar care nu este derivabilă în punctul $x = a$, însă are derivate laterale în *a*. Atunci:

- *a* este *punct unghiular* al graficului lui *f* dacă cel puţin o derivată laterală este finită;
- *a* este *punct de întoarcere* al graficului lui *f* dacă $f_s'(a) = -\infty$ şi $f_d'(a) = +\infty$ (sau invers);
- *a* este *punct de inflexiune* al graficului lui *f* dacă $f_s'(a) = f_d'(a) = \pm\infty$.

Observaţie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Un punct $a \in I$ pentru care există $r > 0$ astfel încât $(a - r, a + r) \subset I$ se numeşte *punct de inflexiune* al funcţiei *f* dacă *f* are derivată în *a* (finită sau infinită) şi este convexă pe $(a - r, a)$ şi concavă pe $(a, a + r)$ sau invers.

Reguli de derivare. Dacă $u : D \to E$ şi $f, g : E \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, atunci:

1. $(f + g)' = f' + g'$; **2.** $(\alpha f)' = \alpha f'$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; **3.** $(fg)' = f'g + fg'$;

4. $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$; **5.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; **6.** $(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$.

Observaţie. Dacă *u* şi *v* sunt funcţii derivabile şi $u > 0$, atunci funcţia $u^v = e^{v \ln u}$ este derivabilă şi $(u^v)' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right)$.

Derivarea funcţiei inverse. Dacă $f : D \to E$ este derivabilă, bijectivă şi $f'(a) \neq 0$, unde $a \in D$, atunci f^{-1} este derivabilă în punctul $b = f(a)$ şi $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Formule de derivare a funcţiilor compuse

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$; **2.** $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a > 0$; **3.** $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; **5.** $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; **6.** $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$;

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; **8.** $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

9. $(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; **10.** $(\text{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$; **11.** $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$;

12. $(\text{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$; **13.** $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$; **14.** $(\text{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}$

5. Proprietăţile funcţiilor derivabile

Puncte de extrem. Fiind dată o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, un punct $a \in D$ se numeşte:

a. *punct de maxim local* dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in U \cap D$;

b. *punct de minim local* dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in U \cap D$.

Un punct de minim sau maxim local se numeşte *punct de extrem local* al funcţiei *f*. Dacă *a* este un punct de extrem local al lui *f*, valoarea $f(a)$ se numeşte *extrem local* al funcţiei *f* (minim sau maxim).

Teorema lui Fermat. Fie I un interval deschis şi $a \in I$ un punct de extrem local al funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă *f* este derivabilă în punctul *a*, atunci $f'(a) = 0$.

Consecinţă. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe un interval deschis *I*, atunci punctele de extrem local ale funcţiei *f* se găsesc printre zerourile derivatei (*punctele critice*).

Teorema lui Rolle. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b), astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Consecinţe. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe un interval *I*. Atunci:

C1. Între două zerouri consecutive ale funcţiei *f* se află cel puţin un zero al derivatei f'.

C2. Între două zerouri consecutive ale derivatei f' se află cel puţin un zero al funcţiei *f*.

Teorema lui Lagrange. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Consecinţe ale teoremei lui Lagrange.

1. O funcţie derivabilă cu derivata nulă pe un interval *I* este constantă pe *I*.

2. Două funcţii derivabile cu derivatele egale pe un interval *I*, diferă printr-o constantă pe *I*.

3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă.

a. Dacă $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in I$, atunci *f* este crescătoare pe *I*;

b. Dacă $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in I$, atunci *f* este descrescătoare pe *I*.

4. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe *I* şi $a \in I$. Dacă *f* este derivabilă pe $I \setminus \{a\}$ şi există limita $\lim_{x \to a} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci *f* are derivată în $x = a$ şi $f'(a) = \lambda$.

Teorema lui Cauchy. Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue pe $[a,b]$ şi derivabile pe (a,b), astfel încât $g(a)\neq g(b)$, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Teorema lui Darboux. Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I.

Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor. Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe un interval I. Atunci:

a. Dacă $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in I$, atunci f este convexă pe I;

b. Dacă $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in I$, atunci f este concavă pe I;

c. Dacă $a\in \mathrm{Int}(I)$ este un punct de inflexiune al funcţiei f, atunci $f''(a)=0$.

Regula lui L'Hôpital. Fie $.a,b\in\overline{\mathbb{R}}, a<b.$ şi $I\subset\mathbb{R}$ un interval, cu $(a,b)\subset I\subset[a,b]$. Dacă $x_0\in[a,b]$ şi $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii cu proprietăţile:

a. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$);

b. f şi g sunt derivabile şi $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in I\setminus\{x_0\}$;

c. există limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$;

atunci există $U\in\mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $g(x)\neq 0,\ \forall x\in U\cap I\setminus\{x_0\}$ şi limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$.

Probleme propuse

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+e^x)-x$.

a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f.

b) Arătaţi că funcţia f este strict descrescătoare.

c) Determinaţi imaginea (mulţimea valorilor) funcţiei f.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

a) Arătaţi că ecuaţia $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

b) Arătaţi că $\dfrac{1}{f'(1)}+\dfrac{1}{f'(2)}+\dfrac{1}{f'(3)}+\dfrac{1}{f'(4)}=0$.

c) Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f.

4. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-x^2\ln\dfrac{x+1}{x}$.

a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x-1$.

a) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

c) Arătaţi că $e^x\geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^x$.

c) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei f.

7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

a) Arătaţi că funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că funcţia f este convexă.

c) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f.

8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

a) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f.

b) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.

c) Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.

9. Fie funcţia $f:(0.\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Arătaţi că funcţia f este convexă.

b) Calculaţi limita şirului $(a_n)_{n\geq1}$, unde $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\ln(2n+1)$.

c) Calculaţi limita şirului $(b_n)_{n\geq1}$, unde $b_n=f''(1)+f''(2)+...+f''(n)$.

10. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f.

b) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.

c) Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.

11. Fie $p\geq 2$ un număr natural fixat şi funcţia $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_0(x)=e^{px}$. Pentru fiecare număr natural n se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=f'_{n-1}(x)$.

a) Arătaţi că $f_n(x)=p^ne^{px}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}$.

b) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f_n.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(a)+f_2(a)+...+f_n(a)}{f_n(a)}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=|x+2|e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției f_n.
b) Determinați domeniul de derivabilitate al funcției *f*.
c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

13. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+\ln x, & x\in(0,1] \\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$.

a) Arătați că funcția *f* este continuă pe $(0,\infty)$.
b) Studiați derivabilitatea funcției *f* în punctul $x=1$.
c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(f(x))^{\frac{1}{x-1}}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{2x+3}$.

a) Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.
b) Determinați limita șirului $(a_n)_{n\geq1}$, unde $a_n=f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)$.
c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x^2)$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
b) Studiați derivabilitatea funcției *f* în punctul $x=0$.
c) Determinați mulțimea valorilor funcției *f*.

6. Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

7. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$.
b) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x(1-\ln f(x))$.

3. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)-x$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.
b) Arătați că $\ln(1+x)\leq x$, pentru orice $x>-1$.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)\sqrt{|x|}$.

a) Studiați derivabilitatea funcției *f*.
b) Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.
c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x+4}$.

a) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.
b) Arătați că $f^2(x)\cdot f'(x)=x^2+1$, pentru orice $x>0$.
c) Determinați derivata funcției *f* în punctul $x=-1$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ \sqrt{|x-1|}, & x\geq0\end{cases}$.

a) Studiați continuitatea funcției *f*.
b) Determinați punctele unghiulare și de întoarcere ale graficului funcției *f*.
c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=5$.

22. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-x$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=0$.
b) Arătați că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.
c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(f(n))^n$.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-\cos x}{x^2}, & x<0\\ x+be^x, & x\geq0\end{cases}$.

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$.
b) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}$.
c) Pentru $a=1$ și $b=\dfrac{1}{2}$, studiați derivabilitatea funcției *f* în punctul $x=0$.

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+\cos x, & x<0\\ x^2+e^x, & x\geq0\end{cases}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
b) Studiați derivabilitatea funcției *f* în punctul $x=0$.
c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\sqrt[n]{2}\right)-f(1)\right)$.

25. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
b) Arătați că funcția *f* este strict descrescătoare.
c) Arătați că funcția *f* este mărginită.

26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

a) Arătați că *f* nu are proprietatea lui Darboux.

b) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

c) Arătați că *f* are derivată în punctul $x=0$ și determinați $f'(0)$.

27. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^x$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.

b) Arătați că funcția *f* este bijectivă.

c) Calculați $(f^{-1})'(1)$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcției *f*.

28. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Arătați că funcția *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că funcția *f* nu este monotonă pe nicio vecinătate a lui 0.

29. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}x$ și $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+xg(x)\right)$.

b) Calculați $f'(x)+g'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

c) Arătați că $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

30. Se consideră funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Studiați monotonia funcției *f*.

c) Determinați mulțimea valorilor funcției *f*.

31. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-x$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.

b) Determinați cel mai mic număr real *a* pentru care $f(x)\leq a$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

c) Aflați numărul de soluții reale al ecuației $f(x)=m$, unde *m* este un parametru real.

32. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(1+x)$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.

b) Determinați mulțimea valorilor funcției *f*.

c) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0>0$ și $a_{n+1}=f(a_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

33. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(-1,1),\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

a) Arătați că funcția *f* este strict crescătoare.

b) Arătați că funcția *f* este surjectivă.

c) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0=\frac{1}{2}$ și $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$, este convergent.

34. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.

a) Arătați că funcția *f* este convexă.

b) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există un singur punct $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

35. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos\sqrt{x}$.

a) Arătați că funcția *f* nu are limită la $+\infty$.

b) Determinați $f'_d(0)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(n+1)-f(n)\right)$.

36. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.

c) Comparați numerele $3^{\sqrt{5}}$ și $5^{\sqrt{3}}$.

37. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.

c) Arătați că $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}>2\sqrt[3]{5}$.

38. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2e^x$.

a) Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.

b) Arătați că $f^{(n)}(x)=\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)e^x$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(0)+f''(0)+\ldots+f^{(n)}(0)}{n^3}$.

39. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\lambda x$, unde $\lambda\in(-1,0)\cup(0,1)$.

a) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

b) Arătați că $f^{(n)}(x)=\lambda^n\sin\left(\lambda x+\frac{n\pi}{2}\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(0)$.

40. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$.

a) Calculați $\lim_{n\to\infty}(f(0)+f(1)+...+f(n))^n$.
b) Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.
c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(1)$.

41. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.
a) Calculați $\lim_{x\to\infty}x(f(x)-1)$.
b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.
c) Determinați valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $f(x)=mx^2$ are exact trei rădăcini reale.

42. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.
a) Calculați $f'(x),\ x\in\mathbb{R}^*$.
b) Determinați valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact două rădăcini reale.
c) Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0>0$ și $a_{n+1}=f(a_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Calculați $\lim_{n\to\infty}(f(a_n)-a_n)$.

43. Se consideră funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}\cdot(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real *x*.
a) Calculați $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)$.
b) Determinați domeniul de continuitate al funcției *f*.
c) Determinați punctele în care funcția *f* nu este derivabilă.

Bacalaureat 2009, varianta 28

44. Se consideră mulțimea de funcții
$$\mathcal{M}=\{f:[-1,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ este de două ori derivabilă, } f(0)=0,\ f'(0)=1\}.$$
a) Arătați că funcția $u:[-1,1]\to\mathbb{R},\ u(x)=e^x\sin x$ aparține mulțimii $\mathcal{M}$.
b) Arătați că, dacă $f\in\mathcal{M}$, atunci $\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}}=e^{f'(0)}$.
c) Demonstrați că, dacă $f\in\mathcal{M}$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\frac{nf''(0)}{2}$.

Bacalaureat 2009, varianta 67

45. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.
a) Arătați că $|f(x)|\leq|x|$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
b) Arătați că funcția *f* este continuă în punctul $x=0$.
c) Arătați că funcția *f* nu este derivabilă în punctul $x=0$.

Bacalaureat 2009, varianta 63

46. Fie mulțimea $A=\mathbb{R}\setminus\{1,2,...,n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ și $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+...+\frac{1}{x-n}$.
a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
b) Dacă $a\in\mathbb{R}$, determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=a$.
c) Determinați numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției *f*.

Bacalaureat 2009, varianta 96

47. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
a) Arătați că *f* este bijectivă.
b) Calculați $(f^{-1})'(\ln 2)$.
c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{\ln(n^2+1)}$.

48. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.
a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
b) Calculați $f'(x),\ x\in(1,\infty)$.
c) Calculați $\lim_{n\to\infty}(f(1)+f(2)+...+f(n))$.

49. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x}{x}$.
a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.
b) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
c) Calculați $\lim_{n\to\infty}n^2(f(n+1)-f(n))$.

Bacalaureat 2009, varianta 84

50. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.
a) Arătați că funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}$.
b) Studiați derivabilitatea funcției *f* în punctul $x=0$.
c) Calculați $\lim_{n\to\infty}n^2\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$.

51. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$.
a) Calculați $\lim_{x\to\infty}f(x)$.
b) Studiați continuitatea funcției *f*.
c) Studiați derivabilitatea funcției *f*.

52. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}$.
a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(f(n+1)-f(n)\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+3x$.

a) Arătați că, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$, ecuația $f(x)=\lambda$ are o unică soluție reală $u(\lambda)$.

b) Arătați că funcția *u* definită mai sus este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{u(\lambda)}{\lambda}$.

7. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1\in(0,1)$ și $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1,\ \forall n\geq 1$.

a) Arătați că $a_n\in(0,1)$, pentru orice $n\geq 1$.

b) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2...a_n)$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

a) Arătați că funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Studiați derivabilitatea funcției *f* în punctul $x=0$.

c) Fie $x_0\in\mathbb{R}$ și $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

9. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$, se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=e^{-x}+nx^2-2x-1$.

a) Arătați că funcția f_n este convexă, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Demonstrați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=0$ are o unică soluție reală pozitivă, notată x_n, iar $x_n\in\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1+\sqrt{n+1}}{n}\right)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

0. Se consideră funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n+\ln x$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=0$ are o singură soluție reală, notată x_n, și $x_n\in(0,1)$.

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Alte probleme selectate din variantele propuse de MEdCT

71. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=1$.

b) Arătați că funcția *f* are două puncte de extrem.

c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

Bacalaureat 2008, varianta 81

72. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

a) Arătați că graficul funcției *f* admite asimptotă spre $+\infty$.

b) Arătați că funcția *f* este inversabilă.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$. *Bacalaureat 2008, varianta 91*

73. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

b) Determinați domeniul de derivabilitate al funcției *f*.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției *f*. *Bacalaureat 2009, varianta 55*

74. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=0$.

b) Arătați că graficul funcției *f* admite asimptotă spre $+\infty$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$. *Bacalaureat 2008, varianta 99*

75. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$.

a) Arătați că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției *f*.

b) Arătați că graficul funcției *f* admite asimptotă spre $+\infty$.

c) Studiați derivabilitatea funcției *f*.

Bacalaureat 2009, varianta 83

76. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

a) Arătați că graficul funcției *f* admite asimptotă spre $+\infty$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(2\operatorname{arctg} f(x)-\pi\right)$. *Bacalaureat 2009, varianta 78*

77. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

Bacalaureat 2009, varianta 50

78. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}^* \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

a) Arătați că funcția *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
b) Calculați $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.
c) Demonstrați că funcția *f* este mărginită pe $\mathbb{R}$. *Bacalaureat 2009, varianta 16*

79. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

a) Arătați că funcția *f* este continuă pe $[0,1]$.
b) Determinați domeniul de derivabilitate al funcției *f*.
c) Arătați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$. *Bacalaureat 2009, varianta 52*

80. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

a) Calculați $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
b) Determinați domeniul de derivabilitate al funcției *f*.
c) Demonstrați că funcția *f* are două puncte de extrem.
Bacalaureat 2009, varianta 48

81. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

a) Arătați că graficul funcției nu admite asimptotă spre $+\infty$.
b) Arătați că ecuația $f(x)=0$ are o unică soluție $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.
c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.
Bacalaureat 2009, varianta 76

82. Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\ln x)$.

a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=e$.
b) Demonstrați că funcția *f* este concavă.
c) Calculați $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$. *Bacalaureat 2009, varianta 92*

83. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$.

a) Arătați că funcția *f* este convexă.
b) Arătați că funcția f' este mărginită.
c) Demonstrați că $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Bacalaureat 2009, varianta 10

84. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $xf(x)=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=1$.
b) Arătați că funcția *f* este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=1$.
c) Arătați că dacă funcția *f* este continuă în $x=0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
Bacalaureat 2009, varianta 77

85. Fie $a\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

a) Calculați $\lim_{x\to\infty}(f(x))^x$.
b) Determinați valoarea numărului real *a* pentru care 3 este punct de extrem local al funcției *f*.
c) Determinați valoarea numărului real *a* pentru care graficul funcției *f* admite exact o asimptotă verticală. *Bacalaureat 2009, varianta 73*

86. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Determinați valorile numărului real *a* pentru care funcția *f* are trei puncte de extrem.
c) Pentru $a=0$, determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.
Bacalaureat 2009, varianta 46

87. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

a) Arătați că funcția *f* este strict crescătoare.
b) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_1=1$ și $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
c) Demonstrați că $f(x+1)-f(x)\leq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Bacalaureat 2009, varianta 87*

88. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x$ și șirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_1=1$ și $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că funcția *f* este strict crescătoare.
b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ a graficului funcției *f*.
c) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent. *Bacalaureat 2009, varianta 42*

89. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ și șirul $(x_n)_{n\geq0}$ definit prin $x_0=2$ și $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.
b) Arătați că $\lim_{n\to\infty}x_n=1$.
c) Demonstrați că șirul $(y_n)_{n\geq0}$, dat de $y_n=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n-n$ este convergent.
Bacalaureat 2009, varianta 18

90. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției f_1.
b) Arătați că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$, sunt convexe.
c) Admitem că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent la 2. *Bacalaureat 2009, varianta 90*

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

a) Arătaţi că funcţia *f* este strict crescătoare.

b) Admitem că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia $f(x)=n$ are soluţia unică x_n. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, unde $(x_n)_{n\geq 1}$ este şirul definit mai sus.

Bacalaureat 2009, varianta 9

2. Se dau funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

a) Arătaţi că funcţia *f* este strict crescătoare.

b) Arătaţi că $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Bacalaureat 2009, varianta 8

3. Pentru fiecare $t\in\mathbb{R}$ consideră funcţia $f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_t(x)=x^3+t^2x$.

a) Calculaţi $f_t'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că fiecare funcţie $f_t,\ t\in\mathbb{R}$, este inversabilă.

c) Arătaţi că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(t)=f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul $t=0$.

Bacalaureat 2009, varianta 93

4. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ se defineşte funcţia $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n-nx-1$.

a) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, funcţia f_n este convexă.

b) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, ecuaţia $f_n(x)=0$ are soluţie unică.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, unde x_n este unica soluţie a ecuaţiei $f_n(x)=0$, $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Bacalaureat 2009, varianta 98

5. Se consideră funcţiile $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că graficele funcţiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

b) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{x_n}$, unde x_n este punctul de extrem al funcţiei f_n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Bacalaureat 2009, varianta 94

6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

a) Studiaţi derivabilitatea funcţiei *f* în punctul $x=0$.

b) Arătaţi că, pentru orice număr real $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$ este strict descrescător.

Bacalaureat 2009, varianta 69

97. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ şi şirul $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f_1.

b) Arătaţi că $\dfrac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{k},\ \forall k\in\mathbb{N}^*$

c) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Bacalaureat 2009, varianta 7

98. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)$.

a) Calculaţi $f'(x),\ x\in(0,\infty)$.

b) Arătaţi că $f(x)<0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

c) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

Bacalaureat 2009, varianta 68

99. Pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$, se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\sin^n x$ şi se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune a graficului funcţiei din intervalul $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Arătaţi că $f''(x)=n(n-1)\sin^{n-2}x-n^2\sin^n x,\ x\in\mathbb{R}$, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$.

b) Arătaţi că $\sin x_n=\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$

Bacalaureat 2009, varianta 14

100. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

a) Arătaţi că funcţia f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

b) Arătaţi că $\dfrac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<\dfrac{1}{2k\sqrt{k}}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Bacalaureat 2009, varianta 33

Tema 3.2
Primitive.

Primitive.

Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Spunem că funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive dacă există o funcţie derivabilă $F: I \to \mathbb{R}$ astfel încât $F' = f$.

Observaţii.

1. Dacă funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ admite o primitivă, atunci există o infinitate de primitive ale sale. Mulţimea acestor primitive se notează cu $\int f(x)dx$.

2. Dacă $F: I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f: I \to \mathbb{R}$, atunci $\int f(x)dx = F(x) + C$, unde C este mulţimea funcţiilor reale constante.

3. Orice funcţie continuă $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive.

4. Orice funcţie $f: I \to \mathbb{R}$ care admite primitive are proprietatea lui Darboux. Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, atunci nu admite primitive pe I.

5. Dacă o funcţie $f: I \to \mathbb{R}$ are un punct de discontinuitate de speţa I, atunci f nu admite primitive.

Proprietăţi. Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ două funcţii care admit primitive.

1. Dacă funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, atunci $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

2. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

3. Formula de integrare prin părţi: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$.

Formule utile

1. $\int a\, dx = ax + C,\ a \in \mathbb{R},\ D = \mathbb{R}$.

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ D = (0, +\infty)$.

2.1. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,\ D = \mathbb{R}$.

2.2. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C,\ D = [0, +\infty)$.

2.3. $\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + C,\ D = \mathbb{R}$.

2.4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C,\ D = (0, +\infty)$.

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}} dx = 2\sqrt{x+a} + C,\ a \in \mathbb{R},\ D = (-a, +\infty)$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in (0, +\infty) \setminus \{1\},\ D = \mathbb{R}$.

3.1. $\int e^x dx = e^x + C,\ D = \mathbb{R}$.

3.2. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = \mathbb{R}$.

4. $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ a \in \mathbb{R},\ D = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$.

4.1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ D = \mathbb{R}^*$.

4.2. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$.

5. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$.

5.1. $\int \frac{x}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - a^2| + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$.

6. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = \mathbb{R}$.

6.1. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C,\ D = \mathbb{R}$.

6.2. $\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C,\ a \in \mathbb{R}^*$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,\ a \in \mathbb{R},\ D = \mathbb{R}$.

7.1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = \mathbb{R}$.

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,\ a \in (0, +\infty),\ D = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

8.1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ a \in (0, +\infty),\ D = (-a, a)$.

9.1. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C,\ a \in \mathbb{R}^*,\ D = (-a, a)$.

10. $\int \sin x dx = -\cos x + C,\ D = \mathbb{R}$;

11. $\int \cos x dx = \sin x + C,\ D = \mathbb{R}$.

12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C,\ D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

13. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C,\ D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

14. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,\ D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

15. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,\ D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Probleme propuse

1. Fie funcţiile $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$ şi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (-2x^2 - 1)e^{-2x}$.

a) Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Arătaţi că funcţia F este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că funcţia F este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$ e o primitivă a funcţiei f.

b) Să se arate că orice primitivă G a funcţiei f este strict crescătoare pe $[1,+\infty)$.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

a) Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcţiei f.

b) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare.

c) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este injectivă dar nu este surjectivă.

d) Determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei F.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+x+a\right)$, $a\in\mathbb{R}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f.

a) Determinaţi a ştiind că F este strict crescătoare.

b) Determinaţi a ştiind că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}=\frac{1}{4}$.

c) Determinaţi a ştiind că funcţia F are două puncte de inflexiune.

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}\left(ax^2+4x+a\right)$, $a\in\mathbb{R}^*$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f.

a) Determinaţi a ştiind că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$.

b) Determinaţi a ştiind că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcţia F are două puncte de inflexiune.

6. Fie $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax+b)3^{-x}$, $f(x)=x3^{-x}$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

7. Se consideră funcţiile $F,f:\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax+b)\sqrt{3x+1}$, $f(x)=\sqrt{3x+1}$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

8. Se dau funcţiile $F,f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x+1}$, $f(x)=x\sqrt{x+1}$.

a) Dacă F este o primitivă a lui f, calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$.

b) Dacă F este o primitivă a lui f, determinaţi intervalele de monotonie ale lui F.

c) Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

9. Se consideră funcţiile $F,f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x(a\ln^2 x+b\ln x+c)$, $f(x)=\ln^2 x$.

a) Dacă F este o primitivă a lui f, calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$.

b) Dacă F este o primitivă a lui f, calculaţi $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{F(x)}{x}$.

c) Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

10. Arătaţi că există numerele reale a, b, c astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+b)\cos x+cx\sin x$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$.

11. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3+\cos x & \text{pentru } x<0\\ a & \text{pentru } x=0\\ \ln(x+1)+b & \text{pentru } x>0\end{cases}$ admite primitive.

12. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$ admite primitive, unde $\{a\}$ este parte fracţionară a numărului real a.

Variante bacalaureat 2009, enunţ adaptat.

13. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]\cos\frac{(1+2x)\pi}{2}$ admite primitive, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

14. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}x^4+x & \text{pentru } x<0\\ \ln(x^2+1)+ax & \text{pentru } x\geq 0\end{cases}$ este primitiva unei alte funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

15. Se consideră funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\begin{cases}2x^2-x, & x\leq 1\\ \ln(x^2+x-1)+ax+b, & x>1\end{cases}$.

Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care G este primitiva unei alte funcţii $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

16. Se consideră funcţiile $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}x^{2012}+x & \text{pentru } x<0\\ a & \text{pentru } x=0\\ x^2\ln x+bx+c & \text{pentru } x>0\end{cases}$.

Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia F este primitiva unei funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

17. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \ln^2 x+1, & x\geq 1\end{cases}$. Determinaţi numerele a şi b pentru care funcţia F este primitiva unei funcţii f.

18. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}axe^x-x, & x\leq 0\\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$. Să se determine numerele a şi b ştiind că funcţia f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei alte funcţii.

9. Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^{2012} & \text{pentru } x\le 0 \\ x^{\alpha}\ln x + x^2 & \text{pentru } x>0 \end{cases}$ admite primitive.

0. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $xf(x)=\operatorname{arctg} x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $f(0)$ știind că funcția *f* admite primitive.

b) Pentru $f(0)=1$, arătați că orice primitivă *F* a lui *f* este strict crescătoare.

c) Pentru $f(0)=1$, calculați limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, unde *F* este o primitivă a funcției *f*.

1. Arătați că funcțiile următoare admit primitive.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \ln x+\sin x, & x>0 \end{cases}$.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$. *Variante bacalaureat 2009*

2. Arătați că funcțiile următoare **nu** admit primitive.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x\ln x+1, & x>0 \end{cases}$.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^3-8}, & x\ne 2 \\ 1, & x=2 \end{cases}$.

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x+1, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ o funcție derivabilă. Determinați, în funcție de *f*, primitivele:

a) $\int (f(x)+f'(x))e^x dx$; *b)* $\int\left(f'(x)\cdot\operatorname{arctg} x+\dfrac{f(x)}{x^2+1}\right)dx$; *c)* $\int \dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx$;

d) $\int(\sin x\cdot f'(x)+\cos x\cdot f(x))dx$; *e)* $\int(\sin x\cdot f'(x)-\cos x\cdot f(x))dx$;

f) $\int\dfrac{e^x f(x)-e^x f'(x)}{f^2(x)}dx$; *g)* $\int\left(f'(x)\cdot f^2(x)\right)dx$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ o funcție de două ori derivabilă. Determinați, în funcție de *f*, următoarele primitive.

a) $\int(f''(x)+f'(x))e^x dx$; *b)* $\int(-f'(-x)+f(-x))e^x dx$;

c) $\int\dfrac{f''(x)-f'(x)}{e^x}dx$; *d)* $\int\left((f')^2(x)+f(x)f''(x)\right)dx$;

e) $\int\dfrac{f''(x)f(x)-(f')^2(x)}{f^2(x)}dx$, *Variante bacalaureat 2009*

25. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{x^2+4}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $\int f_1(x)dx$ și $\int f_3(x)dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f_4 este o funcție bijectivă.

c) Determinați *n*, pentru care funcția f_n admite primitive injective.

26. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

a) Demonstrați că primitivele funcției f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

b) Calculați $\int\dfrac{\ln x}{f_n(x)}dx$, $x\in(1,+\infty)$, $n\ge 2$.

27. Se consideră funcțiile $f_n:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{x+3}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $\int f_1(x)dx$ și $\int f_2(x)dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f_4 este crescătoare.

c) Determinați *n*, pentru care funcția f_n admite primitive descrescătoare pe intervalul $(-3,0)$.

28. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $\int f_0(x)dx$ și $\int(f_0(x)-f_1(x))dx$.

b) Fie F_0 primitiva funcției f_0 care îndeplinește condiția $F_0(0)=0$. Calculați $F_0(1)$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f_{2012} este concavă pe intervalul $(-\infty,0)$.

d) Determinați toate numerele $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care orice primitivă a lui f_n este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Tema 3.3
Funcții integrabile.

Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b)$ o *diviziune* a intervalului $[a,b]$ și $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,2,...,n\}$ un *sistem de puncte* *ntermediare asociat diviziunii* Δ. Numărul $\|\Delta\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| \mid i = \overline{1,n}\}$ se numește *orma diviziunii* Δ. Pentru funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ notăm $\sigma(f,\Delta,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, umită și *suma Riemann* asociată funcției *f*, diviziunii Δ și sistemului de puncte ntermediare ξ.

Definiție. Funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este *integrabilă pe intervalul* $[a,b]$, dacă limita $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma(f,\Delta,\xi) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ este finită. Aceasta se notează cu $\int_a^b f(x)dx$.

Observație.

. De cele mai multe ori în exerciții întâlnim următorul caz particular. $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $\Delta = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ... < \frac{n}{n} = 1\right)$ - *diviziunea echidistantă* a intervalului $[0,1]$, și sistemul de uncte intermediare $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ cu $\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i = \overline{1,n}$. Dacă funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe intervalul $[0,1]$, atunci $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$.

. Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este funcție **monotonă**, atunci *f* este integrabilă pe intervalul $[a,b]$.

. Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este funcție **continuă**, atunci *f* este integrabilă pe intervalul $[a,b]$.

. Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este funcție **continuă pe intervalul** $[a,b]$ **cu excepția unui număr** **init de puncte de discontinuitate de speța I**, atunci *f* este integrabilă pe intervalul $[a,b]$.

Proprietăți importante

. **Formula Leibniz-Newton (formula fundamentală a calculului integral).** Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă care are primitive, și F este o primitivă oarecare a ui *f*, atunci $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. **3.** $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

. **Aditivitatea în raport cu un interval.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $\forall c \in [a,b]$.

5. Formula de integrare prin părți. Dacă în plus funcțiile f și g sunt derivabile cu derivatele funcții continue, atunci $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

6. Teorema de medie pentru integrale. Dacă funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

7. Prima formulă de schimbare de variabilă. Fie funcția $f:J \to \mathbb{R}$ continuă și funcția $u:[a,b] \to J$ (J este un interval) continuă cu derivata continuă, atunci $\int_a^b u'(x)f(u(x))dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$.

8. A doua formulă de schimbare de variabilă. Fie $\varphi:[c,d] \to [a,b]$ o funcție bijectivă, φ, φ^{-1} derivabile, φ' continuă și $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [c,d]$. Dacă funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

9. Derivata unei integrale. Fie funcția continuă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ și $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Atunci funcția F este o primitivă a funcției *f*, adică $F'(x) = f(x)$.

9.1. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă și funcția $u:I \to [a,b]$, (I este un interval) este derivabilă cu derivata continuă, atunci funcția $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este derivabilă și $F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$.

10. Proprietăți de monotonie și mărginire.

Dacă funcția $f:[a,b] \to [0,+\infty)$ este integrabilă, atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Dacă funcțiile $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile și $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Aplicații ale integralei definite. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

11. Aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=a$ și $x=b$ este egală cu $\int_a^b |f(x)|dx$.

12. Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției *f* în jurul axei *Ox* este egal cu $V_f = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Probleme propuse

1. Calculați următoarele integrale (formula Leibniz-Newton).

a) $\int_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx$; *b)* $\int_0^2 \left(x-\sqrt{x}\right)^2 dx$; *c)* $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x} dx$;

d) $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}} dx$; *e)* $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; *f)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$;

2. Calculați următoarele integrale (formula Leibniz-Newton).

a) $\int_0^1 \left(x-e^x\right) dx$; *b)* $\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x}-e^x\right)^2 dx$; *c)* $\int_0^1 \left(2^x+3^{-x}\right) dx$;

d) $\int_{-1}^1 \left(2^x-2^{-x}\right) dx$; *e)* $\int_0^4 \left(\sqrt{2}^x-\frac{2}{\sqrt{3^x}}\right) dx$; *f)* $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} dx$.

3. Calculați următoarele integrale (formula Leibniz-Newton).

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$; *b)* $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$; *c)* $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx$; *d)* $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+x+2}{x^2+1} dx$;

e) $\int_2^3 \frac{x^3-x+2}{x^2-1} dx$; *f)* $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx$; *g)* $\int_0^1 \frac{x^2}{3x^2+1} dx$.

4. Calculați următoarele integrale (formula Leibniz-Newton).

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$; *b)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$; *c)* $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$; *d)* $\int_2^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; *f)* $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$; *g)* $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$.

5. Calculați următoarele integrale (formula Leibniz-Newton).

a) $\int_0^\pi \sin x dx$; *b)* $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; *c)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$; *d)* $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx$;

e) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$; *f)* $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$; *g)* $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

6. Calculați următoarele integrale (aditivitatea la interval).

a) $\int_0^2 |x-1| dx$; *b)* $\int_0^2 |x^2-1| dx$; *c)* $\int_0^2 x[x] dx$;

d) $\int_{-1}^1 x\{x\} dx$; *e)* $\int_{-1}^1 |x-\sin x| dx$; *f)* $\int_{-1}^1 |x-\operatorname{arctg} x| dx$.

7. Calculați următoarele integrale (formula de integrare prin părți):

a) $\int_0^\pi x\sin x dx$; *b)* $\int_0^\pi x\cos x dx$; *c)* $\int_0^1 xe^x dx$; *d)* $\int_0^1 x^2e^{-x} dx$; *e)* $\int_1^e \ln x dx$;

f) $\int_1^e \ln^2 x dx$; *g)* $\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$; *h)* $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; *i)* $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

8. Calculați următoarele integrale (prima formulă de schimbare de variabilă):

a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx$; *b)* $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos x^3 dx$; *c)* $\int_1^e \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; *d)* $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$;

e) $\int_1^e \frac{\ln^{2012} x}{x} dx$; *f)* $\int_0^\pi \cos x\cdot\sin(\sin x) dx$; *g)* $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin dx}{1+\cos x}$.

9. Calculați următoarele integrale (a doua formulă de schimbare de variabilă):

a) $\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$; *b)* $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$.

10. Se consideră funcțiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{\cos x+x\sin x}{x^2}$ și $F(x)=\frac{\cos x}{x}$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_\pi^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

a) Calculați $\int f(x) dx$.

b) Determinați aria suprafeței plane determinate de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\pi$.

c) Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

12. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+2x^2+2}$ și $F(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $F'(x)+2f(x)=0$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x) dx$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3 f(x)$, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx \in (1,2)$.

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}e^t dt$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Arătaţi că $f(x)\geq 0,\ \forall x\in(0,+\infty)$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_{-x}^x \frac{t^{2012}}{t^2+1}dt$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Arătaţi că $f(-x)=-f(x)$.

c) Arătaţi că $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,+\infty)$ şi $f(x)\leq 0,\ \forall x\in(-\infty,0]$.

16. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x (t^4-4t+3)\sqrt{t^4+1}dt$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Determinaţi mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei *f*.

17. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a) Determinaţi aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t^2)dt\in\mathbb{R}$.

c) Calculaţi $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}f(x)dx$.

18. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 (t^3+1)f(t)dt$.

b) Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt=\int_1^x t^3 f(t)dt,\ \forall x>0$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$.

Variante bacalaureat 2009

19. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^4+1}dt$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei *f*.

c) Arătaţi că graficul funcţiei *f* nu are asimptote la $+\infty$.

20. Se consideră funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_1^{x^2}\arcsin\frac{t^2}{t^2+1}dt$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{f(x)}{x-1}$.

b) Arătaţi că funcţia *f* este strict crescătoare.

c) Arătaţi că graficul funcţiei *f* nu are asimptote.

21. Se consideră o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x)=\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\int_0^{\pi}x^2 f(x)dx$.

b) Să se arate că funcţia *f* este integrabilă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\leq\cos 1$.

Variante bacalaureat 2008

22. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t^4}dt$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

b) Arătaţi că funcţia f este injectivă.

c) Arătaţi că funcţia f **nu** este surjectivă.

23. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^n e^{-x^2}dx$.

a) Arătaţi că $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{e}\leq I_1\leq\frac{\pi}{4}$.

c) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Variante bacalaureat 1998, enunţ adaptat.

24. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2012}dx$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $I_{n+2}+2012\cdot I_n=\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

e) Calculați $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_1^2 (1-x)^{2n}\ln(x^2+1)\,dx$.

a) Calculați I_0.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = C_{2n}^0 - \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 - \ldots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$.

a) Calculați $\int_0^1 (1-x)^4\,dx$.

b) Calculați $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1-x)^{2n}\,dx$.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$.

a) Arătați că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

Bacalaureat 2009, model subiect

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$.

a) Calculați $\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1} f(x)\,dx$.

b) Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n^2+2\cdot n+1^2}+\frac{n}{n^2+2\cdot 2n+2^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2+2\cdot n^2+n^2}\right)$.

Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției f în jurul lui Ox.

c) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

d) Calculați $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$.

Variante Bacalaureat 2009, enunț adaptat

30. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^2 (2x-x^2)^n\,dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

c) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ tinde descrescător către 0.

Bacalaureat 2009, model subiect

31. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_2.

b) Să se demonstreze că $I_n=\frac{n}{4n+2}I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Bacalaureat 2009, model subiect

32. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

a) Calculați $\int_1^4 f(\sqrt{x})\,dx$.

b) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ și de axa Ox.

c) Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)\,dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)\,dx=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Bacalaureat 2011

33. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^{2012}+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 x^{2011}\cdot f(x)\,dx$.

b) Calculați $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)\,dx$.

c) Arăți că $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt\in\mathbb{R}$.

34. Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x & \text{pentru } x\in[0,1] \\ x+e^x & \text{pentru } x\in(1,2]\end{cases}$

a) Arătaţi că funcţia f este integrabilă, dar nu admite primitive.
b) Determinaţi aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=2$.
c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_1^2 f^n(x)dx}{n}$.

35. Se consideră o funcţie continuă şi strict crescătoare $f:[0,2012]\to\mathbb{R}$. Arătaţi că funcţia $g:[0,2012]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt-x f(1006)$ nu este injectivă.

36. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\int_1^2\frac{1}{x^n+1}dx$.
a) Calculaţi I_2.
b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este descrescător.
c) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.
d) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

37. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}dx$.
a) Calculaţi $I_1+I_2+I_3$.
b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este descrescător.
c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Bacalaureat 2010

38. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq0}$, $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{t^2+1}dt$.
a) Calculaţi I_3.
b) Să se arate că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$.
c) Arătaţi că numărul $I_0+I_2+...+I_{2012}$ .este iraţional.
d) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq0}$ este convergent.
e) Să se arate că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

Variante bacalaureat 2009, enunţ adaptat

39. Fie şirul $(I_n)_{n\geq0}$, $I_n=\int_0^1\frac{(x^2+x+1)^n-x}{x^2+1}dx$.
a) Calculaţi I_0.
b) Verificaţi dacă $I_2-I_0\in\mathbb{Q}$.
c) Arătaţi că $I_{4n+1}\in\mathbb{Q}$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Bacalaureat 2011, model subiect

40. Fie şirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.
a) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este crescător.
b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este mărginit.
c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}n(2-I_n)$.

Bacalaureat 2010

41. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{x^n+1}dx$.
a) Calculaţi I_1.
b) Să se arate că $I_n\leq1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Variante bacalaureat 2009

42. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.
a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.
c) Arătaţi că $\int_0^1\left[x(x^2+1)^{6n+1}+x^{3n+2}\right]f(x)dx\in\mathbb{Q}$.

43. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq0}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+x^2+x+1}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
a) Determinaţi numerele reale a,b şi c ştiind că $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$, $\forall x\in[0,1]$.
b) Calculaţi I_0.
c) Arătaţi că numărul $I_{4n+2}-I_{4n+1}+I_1+I_0$ este raţional, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

44. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq0}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+x^2+x+1}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
a) Calculaţi I_1+I_3.
b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.
c) Arătaţi că $I_{n+3}+I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$.
d) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{4}$.
e) Arătaţi că $I_{2n+3}+I_{2n+1}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

45. Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x}$.

a) Calculați $\int_0^1 g(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)dx$.

c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int_1^n g(x^3)dx$ este convergent.

Bacalaureat 2011

46. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_2^3 \frac{t^n}{t^2+1}dt$.

a) Calculați I_4.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

c) Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

47. Pentru fiecare număr $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{t^3+1}dt$.

a) Calculați $f_4(1) + f_1(1)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_{2012}(x)}{x^{2013}}$.

c) Arătați că șirul $(f_n(1))_{n\geq 0}$ este convergent.

d) Arătați că șirul $(f_n(2))_{n\geq 0}$ este divergent.

48. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x dx$.

a) Calculați $I_1 + I_3$.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Demonstrați egalitatea $I_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$.

d) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

49. Pentru fiecare $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se consideră șirul $(I_n(a))_{n\geq 1}$, $I_n(a) = \int_0^a tg^n x\, dx$.

a) Calculați $I_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Arătați că pentru orice $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ șirul $(I_n(a))_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$.

d) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

50. Pentru fiecare număr real a definim șirul $(I_n(a))_{n\geq 1}$, $I_n(a) = \int_0^a (1+\sin x)^n dx$.

a) Calculați $I_2(\pi)$.

b) Calculați $\lim\limits_{a\to 0} \frac{I_{2012}(a)}{a}$.

c) Arătați că pentru orice $a \in (0, \pi)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a (1+\sin x)^n dx = +\infty$.

51. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^n dx$.

a) Calculați x_1.

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

c) Arătați că $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^n dx$.

d) Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

52. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculați $\int_0^{2\pi} xf(x)dx$.

Bacalaureat 2010

53. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arcctg}\frac{k}{n}$.

54. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \cos^n x dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $0 \le I_n \le \frac{\pi}{2}$, $\forall n \ge 2$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

55. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

a) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x)\,dx$ este convergent. *Bacalaureat 2011*

56. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\ln x}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)\,dx$.

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției *f* în jurul axei *Ox*.

c) Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)\,dx=e$. *Variante bacalaureat 2009*

57. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3], f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția *f* are inversa funcția *g*.

a) Să se calculeze $\int_0^{3/4}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

c) Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^\alpha g(x)dx\ge\alpha$.

Variante bacalaureat 2009

58. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\operatorname{arctg} x$.

a) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

b) Arătați că funcția *f* este bijectivă.

c) Calculați $\int_0^{1-\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}$.

59. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x^2+x+1$.

a) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=-2$ și $x=0$.

b) Arătați că funcția *f* este bijectivă.

c) Calculați $\int_1^4 f^{-1}(x)\,dx$.

60. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real *x*.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se demonstreze că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)dx$ nu depinde de numărul real *a*.

Variante bacalaureat 2009

61. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x^{2012}}$.

a) Calculați $\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_0^1\left[f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]dx$.

c) Arătați că $\frac{\pi}{2}\le\int_{-1}^1 f(x)\,dx\le 2$.

62. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ fie funcția $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

a) Calculați $\int\frac{f_{2012}(x)}{f_{2012}(x+1)}dx$, $x\in[0,+\infty)$.

b) Calculați $\int_0^1 (x^2+2)f_3(x^2)\,dx$.

c) Arătați că $\int_1^x f_n(t^3)\,dt\le\frac{x-1}{n!}$, $\forall x\ge1$, $\forall n\ge1$.

63. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x^2+1)$

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Arătați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^x f(t^2)\,dt$ este impară.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{-x}^x f(t^{1006})\,dt}{x^{2013}}$.

64. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{1}{x^n+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f_4(\sqrt{x})\,dx$.

b) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2012}(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2012}(\cos x)dx$.

c) Arătați că $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(\sin x)dx = 1$.

65. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sqrt{x^4+1}, g(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) Calculați $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

b) Arătați că funcția g este monotonă pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că graficul funcției g nu are asimptote la $+\infty$.

66. Pentru fiecare număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ definim funcția $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\sqrt{x^n+1}$.

a) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

b) Calculați $\int_0^1 x\left[f_1(e^x)\right]^2 dx$.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ este convergent la 1.

67. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+1}dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

c) Arătați că $I_n=\frac{1}{n+2}\left[2\sqrt{2}-(n-1)I_{n-2}\right]$.

68. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $(n+2)I_n=(n-1)I_{n-2}, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge3$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Bacalaureat 2008

69. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.

a) Calculați $\int_1^e x\cdot f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_1^e f^n(x)dx+n\int_1^e f^{n-1}(x)dx=e^e$.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} n\int_1^e f^n(x)dx$.

70. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+x+1}dx, \forall n\ge1$.

a) Arătați că $I_{n+3}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\ge1$.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

71. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+1}dx, \forall n\ge1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

72. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos 2x$.

a) Determinați aria suprafeței formate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

b) Determinați volumul corpului format prin rotația graficului funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$ în jurul axei Ox.

c) Arătați că $n\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n-2}(x)dx, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge2$.

73. Pentru fiecare numă natural n se consideră funcția $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{1}{1+|x-n|}$.

a) Calculați $\int_0^2 f_1(x)dx$.

b) Determinați intervalele de convexitate ale unei primitive oarecare a funcției f_{2013}.

c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} n\int_{3n-1}^{3n} f_n(x)dx$.

74. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+3}$.

a) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$ este strict crescătoare.

b) Calculați $\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

c) Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x}$.

Variante de subiecte 4

4.1. Subiecte date la examenul de bacalaureat în anii anteriori

4.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare

4.1
Subiecte date la examenul de bacalaureat în anii anteriori

Testul 1 Examen Bacalaureat, iulie 2012

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x-2$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, inecuația $2^{x+1}\le 4$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5. Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

6. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.

b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

c) În cazul m = 2, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\{X(p)=I_2+pA \mid p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}$.

a) Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p), X(q)\in G$.

b) Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

c) Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-12x$.

a) Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

b) Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)}$.

c) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$.

a) Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

b) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx$.

c) Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x}$.

Testul 2 Examen Bacalaureat, iulie 2012, subiect de rezervă

Subiectul I

1. Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

2. Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$ unde a este un număr real. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

3. Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(4,+\infty), f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}$.

6. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

Subiectul al II-lea

1. Se notează cu $D(a, b, c)$ determinantul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2a&2b&2c\\3a^2&3b^2&3c^2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $D(0,1,-1)$.

b) Determinați numerele reale x pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

c) Arătați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $D(a, b, c)=0$, atunci triunghiul este isoscel.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5,\ f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

a) Calculați $f(\hat{1})+f(\hat{3})$.

b) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

c) Arătați că funcția f nu este surjectivă.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$.

a) Arătați că funcția $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\frac{3-9x}{x^2+3}$, pentru orice număr real x.

b) Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul f.

c) Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$.

a) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a funcției f.

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

c) Arătați că $(p+1)\int_1^x f^p(t)dt+\int_1^x f^{p+1}(t)dt=xf^{p+1}(x)$, pentru orice $x\geq 1$ și orice $p>0$.

Testul 3 Examen Bacalaureat, mai 2012, sesiunea specială

Subiectul I

1. Determinați numărul real m știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2+mx+4=0\right\}$ sunt egale.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei associate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^{\log_3 x}<1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

Subiectul al II-lea

1. În $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $\det(A(\pi))$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$

2. Pe mulțimea G = (0, 1) se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

a) Arătați că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$".

b) Arătaţi că orice element din mulţimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie "$\circ$".

c) Demonstraţi că $f:G\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\ \circ)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

b) Demonstraţi că funcţia *f* este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=f(\sqrt{x})$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ şi $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

a) Calculaţi J_1.

b) Calculaţi I_1.

c) Demonstraţi că $J_{2n}-J_{2n+2}-I_{2n}$, pentru orice număr natural nenul *n*.

Testul 4 Examen Bacalaureat, august 2012

Subiectul I

1. Arătaţi că $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})=2$.

2. Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+5x+4$ cu axa Ox.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}=4$.

4. Determinaţi rangul termenului care conţine x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.

5. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctual A(3, 3) şi este paralelă cu dreapta *d* de ecuaţie $3x+2y-1=0$.

6. Determinaţi măsura unghiului *C* al triunghiului *ABC*. Ştiind că $BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ şi măsura unghiului *BAC* este egală cu 45°.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-x+ay+(2a+4)z=1\\(a+2)x+ay+(a+1)z=1\\(a+1)x+(2a-1)y+3z=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că determinantul matricei sistemuluieste egal cu $3a^2+9a^2-3a-9$

b) Determinaţi valorile reale ale lui *a* pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru a = –2, rezolvaţi sistemul.

2. Se consideră polionomul $f=X^8+\hat{4}X^4+\hat{3},\ f\in\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Arătaţi că $a^5=a$ pentru orice $a\in\mathbb{Z}_5$.

b) Arătaţi că polinomul *f* este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

c) Arătaţi că polinomul *f* nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

c) Demonstraţi că, pentru orice număr real $m>0$, ecuaţia $f(x)=m$ are o soluţie unică în $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $2I_p+(p+1)I_{p-2}=e$, pentru orice $p\geq3$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$.

Testul 5 Bacalaureat 2012, Model MECTS (www.edu.ro)

Subiectul I

1. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x+1|\leq24\}$.

2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=2x^2-3x+1$.

3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

4. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,\ldots,10\}$. Determinaţi numărul de submulţimi cu 3 elemente ale mulţimii *A*, submulţimi care conţin exact 2 numere impare.

5. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului [*AB*], unde *A*(1, –2) şi *B*(3, 4).

6. Ştiind că $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos2x=\dfrac{1}{2}$ calculaţi sin *x*.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+my+m^2z=0\\mx+m^2y+z=0\\m^2x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi valorile lui *m* pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

b) Arătaţi că, pentru nicio valoare a lui *m*, sistemul nu are o soluţie (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 numere reale strict pozitive.

c) Arătaţi că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \frac{1}{2}(x + y + xy + 1)$.

a) Verificaţi dacă legea de compoziţie "*" este asociativă.
b) Arătaţi că legea de compoziţie „*" admite element neutru.
c) Rezolvaţi ecuaţia $x * x * x = 3$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f(-x)}$.
b) Demonstraţi că funcţia *f* este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$.
c) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are trei soluţii reale distincte.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$.

a) Calculaţi I_2.
b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.
c) Demonstraţi că $(2n+1) I_n = 2nI_{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$.

Testul 6 Examen Bacalaureat, iunie 2011

Subiectul I

1. Arătaţi că $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$.
2. Determinaţi valorile reale ale lui *m* pentru care dreapta $x = 2$ este axa de simetrie a parabolei $y = x^2 + mx + 4$.
3. Rezolvaţi în mulţimea $[0, 2\pi)$ ecuaţia $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
4. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care $C_n^2 + A_n^2 = 18$.
5. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : ax + y + 2011 = 0$ şi $d_2 : x - 2y = 0$ sunt paralele.
6. Fie *x* un număr real care verifică egalitatea $\text{tg}x + \text{ctg}x = 2$. Arătaţi că $\sin 2x = 1$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $A(x)A(y) = A(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Arătaţi că $(A(x) - A(y))^{2011} = O_3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
c) Determinaţi inversa matricei $A(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi polinomul $f = X^3 + (1 - \alpha)X^2 + (\alpha - 2)iX + \alpha + (\alpha - 2)i \in \mathbb{C}[X]$.

a) Arătaţi că polinomul *f* are rădăcina -1.
b) Arătaţi că, dacă p, q sunt numere complexe şi polinomul $g = X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci *p* şi *q* sunt numere reale şi $p^2 < 4q$.
c) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{C}$ pentru care polinomul *f* are două rădăcini distincte, complex conjugate.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$.

a) Arătaţi că funcţia *f* este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$.
b) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei *f*.
c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţia $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Calculaţi $\int_1^4 f(\sqrt{x}) dx$.
b) Calculaţi aria suprafeţei determinate de graficul funcţiei $g : [1, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}$ şi de axa *Ox*.
c) Arătaţi că $(4n + 2) \int_1^2 f^n(x) dx + n \int_1^2 f^{n-1}(x) dx = 0$.

Testul 7 Examen Bacalaureat, august 2011

Subiectul I

1. Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 6$ şi $b_3 + b_4 = 24$.
2. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1 - a^2)x + 4$ este constantă.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x$.
4. Determinaţi numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $(1 + \sqrt{2})^{10}$.
5. Calculaţi distanţa de la punctul *A*(2,2) la dreapta determinată de punctele *B*(1,0) şi *C*(0,1).
6. Triunghiul *ABC* are măsura unghiului *A* de 60°, $AB = 4$ şi $AC = 5$. Calculaţi $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră mulţimea $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$.

a) Arătaţi că $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.
b) Demonstraţi că, dacă $A \in H$, atunci $A^n \in H$, pentru orice număr natural nenul *n*.
c) Arătaţi că mulţimea *H* este infinită.

2. Polinomul $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ are forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_{10} \in \mathbb{C}$.

a) Determinaţi restul împărţirii polinomului *f* la $X - i$.
b) Arătaţi că toţi coeficienţii polinomului *f* sunt numere reale.

c) Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5-5x+4$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Arătați că graficul funcției f are un punct de inflexiune.

c) Arătați că, pentru orice $m\in(0,8)$, ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^{-x}$.

a) Calculați $\int_0^1 g(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)dx$.

c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_1^n g(x^3)dx$ este convergent.

Testul 8 Bacalaureat 2011, Model MECTS (www.edu.ro)

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z=1-i\sqrt{3}$.

2. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$.

3. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3=6$ și $b_5=24$, determinați termenul b_7.

4. Determinați $x>0$, știind că $\log_a x=2\log_a 3-3\log_a 2$, unde $a>0$, $a\neq 1$.

5. Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3,2)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: x+2y+5=0$.

6. Știind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & 4x^2\\ 0 & 1 & -4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $(A(2)-A(0))^{2010}$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă și calculați inversa matricei $A(x)$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

a) Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$".

b) Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$".

c) Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbb{R}_+^*, f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$.

a) Calculați $f'(5)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

c) Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 0}, I_n=\int_0^1\frac{(x^2+x+1)^n-x}{x^2+1}dx$.

a) Calculați I_0.

b) Verificați dacă $I_2-I_0\in\mathbb{Q}$.

c) Arătați că $I_{4n+1}\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Testul 9 Examen Bacalaureat, iunie 2010

Subiectul I

1. Calculați $((1-i)(i-1))^4$.

2. Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară.

3. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

4. Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ și $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

6. Triunghiul ABC are $AB=6, AC=3$ și $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul $\begin{cases}x-2y-8z=-65\\ 3x+y-3z=22\\ x+y+z=28\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ și $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -8\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului.

a) Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

b) Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

c) Determinați numărul soluțiilor sistemului din mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

b) Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

c) Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
b) Studiați monotonia funcției f.
c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\ge1}, I_n=\int_n^{n+1}\dfrac{2x-1}{x}dx$.

a) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

Testul **10** Examen Bacalaureat, iunie 2010, subiect de rezervă

Subiectul I

1. Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$.
2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.
4. Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{1,3^3,3^6,3^9,...,3^{2010}\}$.
5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,5), B(-2,5)$ și $C(6,-3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC.

6. Calculați $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ și a este parametru real.

a) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.
b) Verificați dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil.
c) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie $m,n\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

a) Determinați valorile reale m și n pentru care $x_1=2+i$.

b) Determinați valorile reale m și n pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.

c) Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale și $m>0$, $n>0$, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

a) Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției f spre $+\infty$.
b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-2$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculați $\int_0^{2\pi} xf(x)dx$.

Testul **11** Examen Bacalaureat, august 2010

Subiectul I

1. Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ și $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?
2. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$.
3. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale.
4. Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.
5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ și $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.
6. Fie mulțimea $A=\left\{0;\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2};\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie soluție a ecuației $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

a) Arătaţi că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulţimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

a) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

b) Pentru $m=6$ arătaţi că $(M,*)$ este grup.

c) Pentru $m=6$, demonstraţi că funcţia $f:M\to\mathbb{R}^*, f(x)=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,*)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei *f*.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei *f* spre $+\infty$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}, I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+x+1}$.

a) Calculaţi $I_1+I_2+I_3$.

b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este descrescător.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Testul 12 Bacalaureat 2010, Model MECTS (www.edu.ro)

Subiectul I

1. Determinaţi partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculaţi $(f\circ f)(512)$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos 2x+\sin x=0$.

4. Se consideră mulţimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinaţi numărul tripletelor *(a,b,c)* cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5. Calculaţi distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

6. Paralelogramul *ABCD* are $AB=1, BC=2$, şi $m(\sphericalangle BAD)=60°$. Calculaţi produsul scalar $\overline{AC}\cdot\overline{AD}$

Subiectul al II-lea

1. Pentru *a, b, c* $\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases}ax+by+cz=b\\cx+ay+bz=a\\bx+cy+az=c\end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

b) Rezolvaţi sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

c) Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătaţi că sistemul are o infinitate de soluţii *(x, y, z)*, astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\\hat{0}&c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

a) Determinaţi numărul elementelor mulţimii *G*.

b) Daţi un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

c) Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}, X\in G$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

b) Calculaţi $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) Demonstraţi că funcţia *f* este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ şi numerele $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

a) Calculaţi $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

b) Arătaţi că $I_n\leq\ln 2$.

c) Arătaţi că $I_n\geq\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)$.

4.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare

Testul 1

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_5 + a_{11} = 20$. Calculați a_8.
2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = 2x + a$. Determinați valorile lui a pentru care $f \circ g = g \circ f$.
3. Rezolvați în mulțimea $(0, +\infty)$ ecuația $x^2 + 9^{\log_3 x} = 8$.
4. Care este probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă un număr prim de elemente.
5. Fie $m \in \mathbb{R}$ și vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + m^2\vec{j}$. Arătați că unghiul vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ este ascuțit.
6. Arătați că $\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = 3X\}$.

   a) Arătați că $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in M$.

   b) Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, arătați că $a + d \in \{0, 3, 6\}$.

   c) Arătați că dacă $X, Y \in M$ și $X + Y \in M$, atunci $XY = -YX$.

2. Pe mulțimea $(0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$.

   a) Arătați că legea „*" este asociativă.
   b) Arătați că legea „*" **nu** are element neutru.
   c) Rezolvați ecuația $x * x * x * x = 5$, $x \in (0, \infty)$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - 2x$.

   a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
   b) Arătați că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
   c) Arătați că $f(e^x) < f(x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

2. Fie $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculați I_1.

   b) Arătați că $|I_n| \leq 80$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

   c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Testul 2

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de numere reale, cu proprietatea că $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ și $a_4 + a_5 + a_6 = 16$. Determinați rația progresiei.
2. Fie $f : (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{x-3}{x+3}$. Arătați că f este funcție impară.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{3x-2} = 1 - 2x$.
4. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $n! + (n + 1)! < 840$.
5. Fie $\overline{u} = 2\overline{i} - 3\overline{j}$ și $\overline{v} = 4\overline{i} + \overline{j}$. Calculați $|3\overline{u} - \overline{v}|$.
6. Fie $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ cu $\sin x = -\dfrac{5}{12}$. Calculați $\operatorname{tg} = \dfrac{x}{2}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) Calculați inversa matricei AB.

   b) Rezolvați ecuația $\det(A + xB) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   c) Arătați că $(A + B)^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziție $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

   a) Arătați că mulțimea $H = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „*".
   b) Decideți dacă „*" are element neutru.
   c) Rezolvați ecuația $(x * x) * x = 8$, $x \in \mathbb{Z}$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$.

   a) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} x f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   b) Studiați derivabilitatea funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$, în punctul $x = 0$.

   c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \left(f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) + n\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$, $n \geq 1$.

   a) Calculați I_1.

   b) Arătați că $\dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

   c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} n(I_{n+1} + I_{n-1})$.

Testul 5

Subiectul I

1. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ astfel încât $\dfrac{z+i}{1+iz}$ este număr real. Calculaţi modulul lui z.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcţia bijectivă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinaţi valorile lui a pentru care $f = f^{-1}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin x = \cos 2x$.

4. Câte numere naturale de trei cifre au cel puţin o cifră impară?

5. Fie dreptele d_1 şi d_2 respectiv de ecuaţii: $x - 3y + 1 = 0$ şi $3x + y + 2 = 0$, a un număr real şi P punctul de coordonate $(0, a)$. Determinaţi valorile lui a ştiind că P este egal depărtat de d_1 şi d_2.

6. Triunghiul ABC are aria egală cu $\sqrt{3}$, latura AB egală cu 2 şi unghiul $A = \dfrac{\pi}{3}$. Calculaţi BC.

Subiectul II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $\text{rang}(B) = 2$, pentru orice valoare reală a lui m.
b) Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $\det(AB) = 0$.
c) Determinaţi $X \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{Z})$ astfel încât $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Fie a un număr real şi legea „$*$" definită pe $\mathbb{R}$, $x * y = xy + ax + y$.

a) Arătaţi că există un unic $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $e * x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care legea „$*$" are element neutru.
c) Pentru $a = 1$, rezolvaţi ecuaţia $(x * x) * (x * x) = 15$, $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul III

1. Fie funcţia $f:\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to [1, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg}\, x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

a) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f în punctul $x = 0$.
b) Arătaţi că f este bijectivă.
c) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu x_n unicul număr real din intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $f(x_n) = n$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e x \ln^n x \, dx$.

a) Calculaţi I_1.
b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton şi mărginit.
c) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Testul 6

Subiectul I

1. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 3 \right\}$.

2. Fie funcţia bijectivă $f: (1, \infty) \to [2, \infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Determinaţi f^{-1}.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\arccos x + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pi$, $x \in [-1, 1]$.

4. Care este probabilitatea ca alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor mulţimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ea să conţină elementul 1?

5. Determinaţi numerele reale a şi b ştiind că punctul $A(1, 2)$ este punctul de intersecţie a dreptelor de ecuaţii: $2x + ay = 4$ şi respectiv $x - y = b$.

6. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\text{ctg}\, x - \text{tg}\, x = 4$. Calculaţi $\text{tg}\, 2x$.

Subiectul II

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$.

a) Determinaţi inversiunile permutării 5.
b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\{\sigma^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
c) Fie $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ şi τ transpoziţia $(1\ i)$. Arătaţi că $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2012}$.

a) Daţi exemplu de două numere reale x şi y astfel încât $x * y$ este număr natural.
b) Arătaţi că $\mathbb{R}$ este grup în raport cu legea „$*$".
c) Arătaţi că grupul $(\mathbb{R}, *)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.

Subiectul III

1. Fie funcţia $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|\ln x|}{x}$.

a) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f în punctul $x_0 = 1$.
b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c) Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are exact trei soluţii.

2. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

a) Calculaţi aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = -1$, respectiv $x = 0$.
b) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie convexă.
c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

Testul 7

Subiectul I

1. Arătați că numărul $(1+\sqrt{2})\left\{2012+\sqrt{2}\right\}$ este număr natural, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x.
2. Dreptele $x = 1$ și $x = 2$ sunt axe de simetrie ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Arătați că funcția f este periodică.
3. Rezolvați ecuația $2(\cos x-\sin x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. Care este probabilitatea ca alegând unul din numerele A_5^0, A_5^1, A_5^2, A_5^3, A_5^4, A_5^5, el să fie număr impar?
5. În triunghiul ABC notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N mijlocul laturii AC. Arătați că $3\overline{AB}=2\overline{AM}-2\overline{BN}$.
6. Fie $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin x=\dfrac{5}{13}$. Calculați ctg$2x$.

Subiectul II

1. Pentru fiecare $m\in\mathbb{Q}$ se notează cu $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ m & 1 & -1\\ 0 & m & 1\end{pmatrix}$.
   a) Calculați $\det(A(m))$, $m\in\mathbb{Q}$.
   b) Arătați că $A(m)$ este inversabilă, oricare ar fi $m\in\mathbb{Q}$.
   c) Calculați $(A(0))^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Pe $(0,\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.
   a) Arătați că dacă $x*y=1$, atunci $x=1$ sau $y=1$.
   b) Demonstrați că mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ este grup în raport cu legea „*".
   c) Rezolvați ecuația $x*x*x=3$, $x\in(0,\infty)$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-2\dfrac{x-1}{x+1}$.
   a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.
   b) Arătați că graficul funcției f nu are asimptotă spre $+\infty$.
   c) Arătați că $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{2}\ln(n+1)$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.
   a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul lui f, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$.
   b) Calculați $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)\,dx$.
   c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_{-1}^{1}x^{2n}f(x)\,dx$.

Testul 8

Subiectul I

1. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $2z^2+z+2=0$. Calculați $|z|$.
2. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+2x+3$ este monotonă.
3. Rezolvați ecuația $4^x-3\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$, $x\in\mathbb{R}$.
4. Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, știind că numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ este egal cu 20.
5. Aflați coordonatele simetricului punctului $A(1,2)$ față de dreapta $x-2y+5=0$.
6. Triunghiul dreptunghic ABC are $m(\sphericalangle A)=90°$, $m(\sphericalangle B)=30°$ și raza cercului circumscris egală cu 6. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

Subiectul II

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ și funcția $f:S_4\to S_4$, $f(x)=\sigma\cdot x$.
   a) Arătați că σ este permutare impară.
   b) Fie $x\in S_4$. Arătați că $f(x)$ este permutare pară dacă și numai dacă x este permutare impară.
   c) Arătați că, indiferent de ordinea factorilor, produsul celor 24 de permutări din S_4 este diferit de σ.
2. Fie $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+4x & 0 & 8x\\ 0 & 0 & 0\\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right\}$.
   a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)\in G$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
   b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.
   c) Arătați că funcția $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ $f(x)=A\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ este izomorfism de grupuri.

Subiectul III

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$.
   a) Arătați că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
   b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\,f(x)$.
   c) Arătați că $-\dfrac{1}{x}<f(x)<-\dfrac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.
2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx$.
   a) Calculați I_1.
   b) Arătați că $0\leq I_n\leq\dfrac{\sqrt{3}}{4n+2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.
   c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\,I_n$.

Testul 9

Subiectul I

1. Determinaţi numărul natural n astfel încât $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = 625$.
2. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 2x^3 + 3$ **nu** este injectivă.
3. Rezolvaţi ecuaţia $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1, x \in [0, \pi]$.
4. Câte funcţii $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ au $f(1) \neq f(2)$.
5. Fie $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{u} = \overline{i} + 5\overline{j}$ şi $\overline{v} = 2\overline{i} + m\overline{j}$ sunt coliniari. Arătaţi că $|\overline{v}| = 2\sqrt{26}$.
6. Calculaţi aria unui triunghi echilateral înscris într-un cerc de rază 1.

Subiectul II

1. Fie mulţimea $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid 2A^2 + A + I_2 = O_2\}$.

a) Arătaţi că matricea $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii M.

b) Demonstraţi că orice matrice din M este inversabilă.
c) Arătaţi că mulţimea M are o infinitate de elemente.

2. Fie $(S_4, \cdot)$ grupul permutărilor de grad 4 şi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi ordinul permutării σ în grupul S_4.
b) Arătaţi că mulţimea $H = \{\tau \in S_4 \mid \tau \text{ permutare pară}\}$ este subgrup al grupului S_4.
c) Arătaţi că dacă $f : (S_4, \cdot) \to (S_4, \cdot)$ este morfism de grupuri, atunci

$$f(\sigma) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Subiectul III

1. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcţiei f.
b) Arătaţi că f este strict descrescătoare.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{3} + ... + \frac{f(n)}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x^2}$ şi şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^n f(x)dx$.

a) Calculaţi $\int_0^1 x f(x) dx$.
b) Arătaţi că şirul $(I_n)_n$ este monoton şi mărginit.
c) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx$.

Testul 10

Subiectul I

1. Arătaţi că $\log_2 3 > \log_3 4$.
2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$. Determinaţi numărul punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_x(x^2 + 2) = \log_x 3x$.
4. Într-o clasă sunt 20 de fete şi 10 băieţi. Câte echipe mixte formate din 3 fete şi 2 băieţi se pot forma cu elevii din clasă?
5. Fie punctul $A(1, 2)$ şi dreapta d de ecuaţie $x - y - 3 = 0$. Determinaţi coordonatele piciorului perpendicularei din A pe d.
6. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC. Arătaţi că $\sin B > \cos C$.

Subiectul II

1. Fie $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A^t\}$, A^t este transpusa matricei A.

a) Arătaţi că matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine lui M.

b) Dacă $A \in M$ şi A este inversabilă, calculaţi $\det(A)$.

c) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ şi $\det(A) = 0$, arătaţi că $a^2 + b^2 - a = 0$.

2. Fie mulţimea $G = \{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_a(x) = ax + 3(1 - a), a \in \mathbb{R}^*\}$.
a) Arătaţi că $f_a \circ f_b = f_{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*$.
b) Demonstraţi că G este grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.
c) Determinaţi $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $(f_a \circ f_a \circ f_a)(x) = 8x - 21$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor verticale ale graficului funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $f''(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

2. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{t^2 + 2} dt$.

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Arătaţi că $f(x+2) + 2f(x) = \frac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x > 0$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} x f(x)$.

Testul 11

Subiectul I

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = |z-1|$. Calculați partea reală a lui z.
2. În funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ și $g(x) = -x^2 + 4x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care imaginile celor două funcții au exact un element în comun.
3. Rezolvați ecuația $2^{3x} + 1 = 3^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Câte submulțimi ordonate cu 3 elemente, ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, conțin elementul 1?
5. Fie punctele $A(-1, 3)$ și $B(0, 4)$. Determinați coordonatele simetricului lui B față de A.
6. În triunghiul ABC, punctul $D \in (BC)$ este piciorul bisectoarei din A a triunghiului și R_1, R_2 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD. Arătați că dacă $R_1 = R_2$, atunci $AB = AC$.

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Calculați rangul matricei $A^2 - I_3$.
   b) Determinați numerele reale a și b astfel încât $A^2 = aA + bI_3$.
   c) Determinați inversa matricei A.

2. Pe mulțimea $G = (1, \infty)$ definim legea $x * y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y - x^2 - y^2 + 5}$.

   a) Arătați că $x * y = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)+1}$, oricare ar fi $x, y \in (1, \infty)$.
   b) Demonstrați că G este grup în raport cu legea „$*$".
   c) Demonstrați că funcția $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = \sqrt{2x+1}$ este izomorfism de la grupul $((0, \infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

Subiectul III

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} - 1 - x^2$.

   a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic, de abscisă $x_0 = 1$.
   b) Arătați că $2f(x) \geq x^4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
   c) Studiați derivabilitatea în punctul $x = 0$ a funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{f(x)}$.

2. Fie șirul $I_n = \int_0^1 (x^2 + 2x + 2)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculați I_1.
   b) Arătați că $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$.
   c) Calculați $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}((2n+1)I_n - 2nI_{n-1})$.

Testul 12

Subiectul I

1. Arătați că numărul $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+3}$ este număr natural.
2. Fie $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ o funcție impară. Calculați $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2)$.
3. Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{1-x} = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 16 submulțimi cu un număr impar de elemente.
5. Fie punctele $A(-1, 0)$, $B(2, -3)$ și $C(3, -2)$. Scrieți ecuația înălțimii din A a triunghiului ABC.
6. Arătați că $\cos^2 10° + \cos^2 50° + \cos^2 70° = \frac{3}{2}$.

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid X^4 = O_2\}$ și $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

   a) Verificați dacă $A \in M$.
   b) Arătați că dacă $X \in M$, atunci $X^2 = O_2$.
   c) Arătați că ecuația $Y^2 = A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe intervalul $(2, \infty)$ se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = (x-2)^{\ln(y-2)} + 2$.

   a) Arătați că legea de compoziție „$*$" are element neutru.
   b) Determinați elementele nesimetrizabile din intervalul $(2, \infty)$, în raport cu legea „$*$".
   c) Rezolvați ecuația $x * x * x * x = 5$, $x \in (2, \infty)$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x - 1$.

   a) Arătați că funcția f este bijectivă.
   b) Determinați asimptotele graficului funcției $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   c) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = -1$ și $x_{n+1} = f(x_n)$. Calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

   a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = \pi$.
   b) Calculați $\int_0^{2\pi} x f(x) \, dx$.
   c) Calculați $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x (f(t) - 1) \, dt$.

Testul 13

Subiectul I

1. Câte numere raționale conține mulțimea $\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{2012}\right\}$.

2. Fie funcția bijectivă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 2$. Calculați $(f^{-1} \circ f^{-1})(2)$.

3. Rezolvați ecuația $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0,\ x \in [0, 2\pi)$.

4. Câte permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au pe prima poziție un număr par?

5. Demonstrați egalitatea: $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = C_7^4$.

6. În triunghiul ABC are loc relația $\sin A = 2\sin B\cos C$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ și $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că orice matrice din mulțimea M, diferită de O_2, este inversabilă.

b) Arătați că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și $AX = XA$, atunci $X \in M$.

c) Rezolvați ecuația $X^2 = A,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

2. Fie mulțimea $G = \{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_k(x) = 3^k x + 2 \cdot 3^k - 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se arate că $f_k \circ f_p = f_{k+p}$, oricare ar fi $k, p \in \mathbb{Z}$.

b) Să se arate că G este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

c) Să se arate că mulțimea $H = \{f_{3k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este subgrup al grupului $(G, \circ)$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1)$.

a) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

b) Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m,\ m \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că $f(x) > -\dfrac{1}{x^2+1}$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x \, dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\sin 1 - \cos 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} n I_n$.

M. ANDRONACHE • D. ȘERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

Testul 14

Subiectul I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z = \dfrac{1+i}{1-2i} + \dfrac{1+2i}{1-i}$.

2. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [2x] - [x] - \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$ este periodică, cu perioada $\dfrac{1}{2}$.

3. Rezolvați ecuația $4^x = 2^{\frac{1}{x}},\ x \in \mathbb{R}^*$.

4. Determinați numerele naturale n, $n \ge 2$ pentru care $C_n^1 + 2C_n^2 = 16$.

5. Fie punctele $A(1, 2)$ și $G(3, 4)$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, determinați coordonatele mijlocului BC.

6. Triunghiul ABC are $BC = 10$ și raza cercului circumscris $R = 5$. Calculați $\cos A$.

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2b \\ b & 1 & -a \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care $\det(A) = -6$.

b) Arătați că pentru orice valori reale ale lui a și b, rangul matricei A este cel puțin 2.

c) Fie $M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$. Rezolvați ecuația $AX = -\sqrt[3]{6}\, I_3,\ X \in M$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = xy + 3x + 3y + 7$.

a) Arătați că legea „*" este comutativă.

b) Calculați $\dfrac{(1*2)*3}{1*(2*3)}$.

c) Arătați că legea „*" nu are element neutru.

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 3x - 1$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, e+2)$.

b) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(f(-1) + f(-2) + ... + f(-n) + \dfrac{3n^2+5n}{2}\right)$.

c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) \ge mx$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), f(x) = \operatorname{arctg} x$.

a) Calculați $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1} dx$.

b) Calculați $\int_{-1}^1 f^{101}(x)\, dx$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^3 f^n(x)\, dx$.

MATEMATICĂ – M1

Testul 15

Subiectul I

1. Câte numere raționale conține mulțimea $\left\{ \sqrt[n]{1024} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + a, a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care f este impară.

3. Rezolvați ecuația $\log_2 \frac{4^x + 2}{3} = x, x \in \mathbb{R}$.

4. Câte funcții $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ au mulțimea imaginilor formată din exact două elemente?

5. Fie punctele $A(1, 3)$, $B(-3, 5)$ și $M(-1, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care M se află pe mediatoarea segmentului $[AB]$.

6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor a, b și c. Dacă $R = 4$ și $r = 1$, calculați $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$.

Subiectul II

1. Fie numerele întregi a, b și matricea $A = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+1 & a^2+2 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A)$.
b) Arătați că $\text{rang}(A) \geq 2$, oricare ar fi numerele întregi a și b.
c) Arătați că dacă $\text{rang}(A) = 2$, atunci $a = 0$ și $|b| = 1$.

2. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{4(x+y)}{4+xy}$.

a) Rezolvați ecuația $x * x = x$, $x \in (-2, 2)$.
b) Arătați că G este grup în raport cu legea „$*$".
c) Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to (-2, 2)$, $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$ este izomorfism de la grupul $((0, \infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

Subiectul III

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

a) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției f.
b) Studiați derivabilitatea funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$ în punctul $x_0 = -2$.
c) Calculați $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ și notăm cu $I_n = \int_0^1 f^n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = 1$.
b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
c) Arătați că $2n\, I_{n+1} - (2n-1)\, I_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 16

Subiectul I

1. Determinați numărul natural n pentru care $8(1 + 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2n}) = 6\,560$.

2. Determinați mulțimea valorilor întregi ale lui a pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + ax + 1$ nu taie axa Ox.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+2} = 5$.

4. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, el să fie cubul unui număr prim?

5. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $5\,\overline{AM} = 2\,\overline{AB} + 3\,\overline{AC}$. Calculați $\frac{BM}{MC}$.

6. Triunghiul ABC are $AC^2 + AB^2 + AB \cdot AC = BC^2$. Determinați măsura unghiului A.

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Arătați că rangul lui A este 2, oricare ar fi $A \in M$.
b) Arătați că pentru orice $A \in M$, ecuația $X^2 = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Arătați că dacă $A \in M$, atunci matricea $A - I_2$ este inversabilă.

2. Considerăm inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ unde $x * y = x + y + 2$ și $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Determinați elementul neutru al legii „$*$".
b) Arătați că inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ nu are divizori ai lui zero.
c) Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ știind că funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ este morfism de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției f.
c) Calculați $\lim_{x \to \infty} x f(x)$.

2. Fie funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x)$.

a) Determinați primitiva F a funcției f, cu $F(0) = 0$.
b) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx$.
c) Calculați $\int_0^{\pi/4} f(\text{tg}\, x)\,dx$.

Testul 17

Subiectul I

1. Determinați numerele reale x pentru care $[x-1]=\{x\}$.

2. Determinați inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(3,\infty)$, $f(x)=2^x+3$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos x=\operatorname{tg}x$.

4. Care este probabilitatea ca alegând un număr k din mulțimea $\{0, 1, 2,...,6\}$, el să îndeplinească condiția $C_7^k<C_7^{k+1}$?

5. Fie $a\in\mathbb{R}$ și vectorii $\overline{u}=\overline{i}+3\overline{j}$, $\overline{v}=3\overline{i}+a\overline{j}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\overline{u}+\overline{v}$ și $\overline{u}-\overline{v}$ sunt perpendiculari.

6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB=4$, $BC=5$ și $AC=7$. Calculați $\sin A$.

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 6x\\ -x & 1-2x\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x))=2$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că $(A(3))^n=A(4^n-1)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ și $H=\{x^3\mid x\in\mathbb{Z}_7\}$.

a) Rezolvați ecuația $\hat{5}x+\hat{4}=\hat{1}$, $x\in\mathbb{Z}_7$.

b) Determinați numărul elementelor lui H.

c) Determinați perechile $(x, y)\in\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_7$ pentru care $x^3+\hat{2}y^3=\hat{0}$.

Subiectul III

1. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției f.

b) Determinați imaginea funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_2.

b) Arătați că $I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Testul 18

Subiectul I

1. Numerele $\sqrt{3}$ și 3 sunt termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ cu rația r. Arătați că r este număr irațional.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+3x+2}{x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Calculați $f(2)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2 x=\log_3 x$.

4. Determinați valorile naturale ale lui n pentru care dezvoltarea $(1+\sqrt[5]{2})^n$ are exact 7 termeni raționali.

5. Fie $A(1, 2)$ și $B(3, -1)$. Determinați ecuațiile dreptelor care trec prin A și sunt situate la distanța 2 de B.

6. Triunghiul ABC are $AB=4$, $AC=6$ și $BC=2\sqrt{19}$. Calculați $\sin A$.

Subiectul II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}3x-y+2z=3\\ 2x+my+3z=0\\ x+3y+z=4\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

b) Stabiliți dacă există valori reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu componentele în progresie aritmetică.

2. Fie polinomul $f=(X^2+X+1)^{10}+(X^2-X+1)^{10}\in\mathbb{R}[X]$ și $f=a_{20}X^{20}+a_{19}X^{19}+...+a_1x+$ $+a_0$ forma sa algebrică.

a) Determinați restul împărțirii lui f la X^2-1.

b) Calculați $a_0+a_2+a_4+...+a_{20}$.

c) Calculați a_7.

Subiectul III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x+4}$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(1+f(1)\,f(2)\,...\,f(n))^n$.

c) Fie șirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit astfel: $x_1=1$ și $x_{n+1}=f(x_n)$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ și $I_n=\displaystyle\int_1^3 f^n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați aria suprafeței mărginite de graficul lui f, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^3(x-2)\,f^2(x)\,dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

Testul 19

Subiectul I

1. Fie numărul complex nereal z astfel încât $\dfrac{z^2+z+1}{z}$ este număr real. Calculaţi modulul numărului z.
2. Fie $f:[1,\infty)\to B, f(x)=x^2-2x+5$. Determinaţi mulţimea B ştiind că f este surjectivă.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x^2+8^{\log_2 x}=12$.
4. Determinaţi numărul real x ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $(1+x)^8$ este egal cu 70.
5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 1. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}\right|$.
6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor a, b, c. Dacă $b+c-a=2r$, unde r este raza cercului înscris în triunghi, calculaţi măsura unghiului A.

Subiectul II

1. Fie sistemul: $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y+mz=0 \\ x+2y+(m+1)z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.
   a) Determinaţi valorile lui m pentru care sistemul are soluţii nenule.
   b) Determinaţi soluţiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=6$.
   c) Fie A matricea sistemului pentru $m=-2$. Arătaţi că $A^n\neq I_2$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
2. În polinomul $f_a=(X+a)^{12}+(X-a)^{12}$, unde a este un număr real.
   a) Determinaţi restul împărţirii lui f_a la polinomul x^2-a^2.
   b) Determinaţi rădăcinile lui f_a în cazul în care f_a are cel puţin o rădăcină reală.
   c) Arătaţi că pentru orice $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, rădăcinile în $\mathbb{C}$ ale lui f_a au partea reală zero.

Subiectul III

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sin x$.
   a) Arătaţi că f este strict crescătoare.
   b) Calculaţi: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)}{x^3}$.
   c) Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $x_0=1$ şi $x_{n+1}=f(x_n)$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.
2. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\text{arctg}\dfrac{1}{x+1}$.
   a) Arătaţi că orice primitivă a lui $\mathbb{R}$ este concavă.
   b) Calculaţi: $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$.
   c) Calculaţi: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+2} f(t)\,dt$.

Testul 20

Subiectul I

1. Determinaţi numărul natural x astfel încât: $1+5+9+\ldots+x=496$.
2. Fie funcţiile $f, g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât $(g\circ f)(x)=x^4$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. Arătaţi că f este injectivă.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}+\log_2 x=6$.
4. Aflaţi cel mai mic termen al dezvoltării $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)^7$.
5. Fie punctele $A(-1, 2)$, $B(-4, 6)$ şi $C(3, -1)$. Aflaţi lungimea bisectoarei din A a triunghiului ABC.
6. Calculaţi $\cos 2°+\cos 6°+\cos 10°+\ldots+\cos 178°$.

Subiectul II

1. Fie sistemul $\begin{cases} a^2x-b^2y+z=1 \\ (a^2+1)x-(b^2-1)y+2z=2 \\ (a^2+2)x-(b^2-2)y+4z=4 \end{cases}$, unde $a, b\in\mathbb{R}$.
   a) Calculaţi determinarea matricei sistemului.
   b) Determinaţi valorile lui a şi b pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
   c) Arătaţi că dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţia sistemului, atunci: $x_0+y_0+z_0\neq 2012$.
2. Fie polinomul $f=X^4-4X+1$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile lui.
   a) Calculaţi $\left(1-\dfrac{1}{x_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_4}\right)$.
   b) Arătaţi că $x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=0$.
   c) Arătaţi că f are exact două rădăcini reale.

Subiectul III

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x^4+10x^2+1$.
   a) Arătaţi că există $a, b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ astfel încât să se poată aplica funcţiei f teorema lui Rolle.
   b) Determinaţi imaginea funcţiei f.
   c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)}{n^5}\right)^n$.
2. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\cos(\ln x)$.
   a) Calculaţi $I_n=\displaystyle\int_0^{e^\pi}\frac{f(x)}{x}\,dx$.
   b) Calculaţi aria suprafeţei mărginite de graficul lui f, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e$.
   c) Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_e^{e^2} f^n(x)\,dx$.

Testul 21

Subiectul I

1. Arătați că $(-\infty, \log_2 3) \cap (1, +\infty) \neq \varnothing$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$. Calculați $f(f(1))$.

3. Rezolvați ecuația $4^x + 2^x = 72$.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, știind că $A_n^2 = 110$.

5. Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1, 1)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x + y - 1 = 0$.

6. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC cu $AB = 3, BC = 4, CA = 5$.

Subiectul II

1. Considerăm permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați σ^2.

b) Arătați că mulțimea $\{\sigma^m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ are 3 elemente.

c) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^m = \tau^n$. Arătați că 6 divide mn.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(n) \middle| A(n) = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că $A(n) \cdot A(m) = A(n+m)$, oricare ar fi $n, m \in \mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că M este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Arătați că $f: (\mathbb{Z}, +) \to (M, \cdot)$, $f(n) = A(n)$ este izomorfism de grupuri.

Subiectul III

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

a) Calculați derivata funcției f.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0, 1)$.

c) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n definim $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sin x \, dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, oricare ar fi $n \geq 1$.

c) Demonstrați că $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$.

Testul 22

Subiectul I

1. Calculați suma primilor zece termeni ai unei progresii aritmetice având primul termen egal cu -10 și rația egală cu 2.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei ce reprezintă graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x - 3$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x + 1) = -1$.

4. Câte submulțimi ordonate cu 3 elemente are o mulțime cu 4 elemente?

5. Scrieți coordonatele unui punct ce aparțin dreptei de ecuație $x - 2y + 3 = 0$.

6. Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a = \frac{3}{5}$. Calculați $\cos a$.

Subiectul II

1. Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile reale ale lui m pentru care $(-2, 1, 1)$ este soluție a sistemului.

b) Calculați determinantul matricei sistemului.

c) Rezolvați sistemul pentru $m = \frac{1}{3}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x = 8$.

b) Arătați că legea „$\circ$" este asociativă.

c) Arătați că dacă $x, y \in (-1, \infty)$, atunci $x \circ y \in (-1, \infty)$.

Subiectul III

1. Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este crescător.

b) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit superior de 4.

c) Demonstrați că $\lim_{n \to \infty} a_n = 4$.

2. Considerăm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

a) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) \, dx$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x) \, dx$.

c) Demonstrați că $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t) \, dt}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Testul 23

Subiectul I

1. Calculați $(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+3x$. Calculați $f(-10)+f(-9)+...+f(9)+f(10)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $8^{x+1}=4^{1-x}$.

4. Rezolvați în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Arătați că vectorii $\vec{v}_1=\vec{i}+8\vec{j}$ și $\vec{v}_2=4\vec{i}-7\vec{j}$ au module egale.

6. Calculați perimetrul triunghiului ABC știind că $A=120°$, $AB=3$ și $AC=7$.

Subiectul II

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\text{rang}A+\text{rang}B=3$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A+xB)=0$.

c) Arătați că $(A+B)^n=A^n+B^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Polinomul $f=X^3-X-1\in\mathbb{C}[X]$ are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Aflați restul împărțirii lui f la polinomul X^2-1.

b) Calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

c) Arătați că $f(x_1+x_2)=-2$.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$.

a) Calculați derivata funcției f.

b) Arătați că funcția f este convexă.

c) Demonstrați că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-1,\infty)$.

2. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2 f(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_1^{\sqrt{3}} f(x^2)\,dx$.

c) Determinați valorile lui $a\in(1,\infty)$ pentru care $\int_{1/a}^{a} f(x)\,dx=-1$.

Testul 24

Subiectul I

1. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$.

2. Determinați valorile reale ale numărului m știind că abscisa vârfului parabolei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ este egală cu 2.

3. Rezolvați ecuația $\sin x=-1$ în mulțimea numerelor reale.

4. Determinați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^6$.

5. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}_1-\vec{v}_2$, unde $\vec{v}_1=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}_2=2\vec{i}-3\vec{j}$.

6. Fie $a\in\mathbb{R}$ cu $\sin a=0{,}6$. Calculați $\text{tg}^2 a$.

Subiectul II

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Determinați rangul matricei A^2.

b) Arătați că inversa matricei I_3-A este I_3+A+A^2.

c) Calculați inversa matricei I_3+A.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm polinomul $f_n=X^{2n}+X^n+1\in\mathbb{C}\,[x]$.

a) Determinați rădăcinile complexe ale polinomului f_1.

b) Aflați câtul împărțirii polinomului f_2 la polinomul f_1.

c) Demonstrați că f_1 divide f_n dacă și numai dacă 3 nu divide n.

Subiectul III

1. Considerăm șirul $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$, $n\geq 1$.

a) Arătați că $a_{2^{n+1}}-a_{2^n}\geq\frac{1}{2}$, oricare ar fi $n\geq 1$.

b) Arătați că $a_{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}$, oricare ar fi $n\geq 1$.

c) Demonstrați că $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a) Scrieți o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c) Calculați $\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx$.

Testul 25

Subiectul I

1. Arătaţi că $100^{\lg 7} \in \mathbb{N}$.

2. Determinaţi punctul de maxim al funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

3. Arătaţi că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ este injectivă.

4. Câte diagonale are un poligon convex cu 10 laturi?

5. Calculaţi distanţa de la punctul $A(1, 1)$ la dreapta determinată de punctele $B(2, 3)$ şi $C(-1, 5)$.

6. Calculaţi raza cercului circumscris unui triunghi ABC cu $AB = 5$ şi $m(\sphericalangle C) = 120°$.

Subiectul II

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $\det A$.

b) Calculaţi $\operatorname{rang} B$.

c) Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $XA = B$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX - 1$ verifică $|z_1| \geq 1$, $|z_2| \geq 1$, $|z_3| \geq 1$.

a) Calculaţi $z_1 z_2 z_3$.

b) Arătaţi că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

c) Demonstraţi că $a + b = 0$.

Subiectul III

1. Considerăm funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 - x\ln x}{x}$.

a) Calculaţi derivata funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

c) Demonstraţi că există un unic punct $c \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $c \cdot \ln c = 1$.

2. Fie funcţia $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x) \cdot \arcsin\dfrac{x}{2}\, dx$.

c) Arătaţi că $\int_{-1}^0 f(x^2)\, dx = \int_0^1 f(x^2)\, dx$.

Testul 26

Subiectul I

1. Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ ştiind că $z + 2\overline{z} = 9i$.

2. Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y = x + 1$ intersectează parabola de ecuaţie $y = x^2 - 3x + 2$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(1 + \sqrt{2})^x = 3 + 2\sqrt{2}$.

4. Considerăm mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinaţi probabilitatea ca, alegând o submulţime a mulţimii M, aceasta să aibă 3 elemente.

5. Considerăm punctele $A(1, 2)$, $B(0, 1)$ şi $G(-1, 2)$. Aflaţi coordonatele punctului C ştiind că G e centrul de greutate al triunghiului ABC.

6. Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \dfrac{1}{2}$. Calculaţi $\operatorname{tg}\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $\det(A + {}^tA)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

b) Arătaţi că $A^2 - A = I_2$.

c) Fie $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, cu $AB = BA$. Arătaţi că $\operatorname{rang} B \neq 1$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică şi mulţimea $M = \{t \in \mathbb{R} \mid f(x + t) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătaţi că dacă $t \in M$, atunci $-t \in M$.

b) Arătaţi că M e subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

c) Daţi exemplu de funcţie periodică f pentru care $M = \mathbb{Z}$.

Subiectul III

1. Considerăm funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)\operatorname{arctg} x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^3 - 1}$.

b) Calculaţi derivata funcţiei f.

c) Determinaţi asimptota la graficul funcţiei f către ∞.

2. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

b) Calculaţi $\int_0^1 x\, f(x^2)\, dx$.

c) Demonstraţi că şirul $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k^2 + 4n^2}$, $n \geq 1$, este convergent.

Testul 27

Subiectul I

1. O progresie geometrică de numere reale are al doilea termen egal cu 2 şi al cincilea termen egal cu 16. Calculaţi raţia progresiei.

2. Calculaţi $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ ştiind că $p+q=6$ şi $pq=3$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

4. Determinaţi numărul submulţimilor cu cel mult 3 elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ce conţin cel puţin un număr impar.

5. Fie ABC un triunghi echilateral de latură 4. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

6. Fie $a\in\mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a=\frac{1}{3}$. Calculaţi $\sin^2 a$.

Subiectul II

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi rang$A$.

b) Arătaţi că $A^n=14^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătaţi că inversa matricei I_3-A este $I_3-\frac{1}{13}A$.

2. Considerăm polinomul $f=X^3+X^2+aX+b\in\mathbb{Z}[X]$.

a) Aflaţi valorile întregi ale lui a ştiind că $\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului f.

b) Aflaţi valorile întregi ale lui a şi b pentru care f admite rădăcina dublă 1.

c) Demonstraţi că nu există $a, b\in\mathbb{Z}$ astfel încât f să aibă o rădăcină triplă.

Subiectul III

1. Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln^2 x-\ln x+x$.

a) Calculaţi $f'(1)$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $f''(x)=0$, $x\in(0,\infty)$.

c) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr $n\in\mathbb{N}^*$ definim $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}\,dx$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

M. ANDRONACHE • D. ŞERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

Testul 28

Subiectul I

1. Determinaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.

2. Fie $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ rădăcinile ecuaţiei $x^2-5x+2=0$. Calculaţi $x_1+x_2-x_1x_2$.

3. Arătaţi că funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$, este injectivă.

4. Arătaţi că $C_{100}^{50}=2\,C_{99}^{50}$.

5. Fie $ABCD$ un pătrat de latură $\sqrt{2}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$.

6. Fie $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin x=\frac{1}{2}$. Calculaţi $\operatorname{tg} 2x$.

Subiectul II

1. Considerăm numerele distincte $a, b, c\in\mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases}x+ay+a^2z=a^3\\ x+by+b^2z=b^3\\ x+cy+c^2z=c^3\end{cases}$.

a) Arătaţi că determinantul sistemului este egal cu $(c-a)(c-b)(b-a)$.

b) Arătaţi că sistemul este compatibil determinat.

c) Rezolvaţi sistemul.

2. Considerăm inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuaţia $\hat{2}x=\hat{6}$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuaţia $x^2=\hat{1}$.

c) Arătaţi că dacă $x\in\mathbb{Z}_{12}$ verifică $x^{11}=\hat{1}$, atunci $x=\hat{1}$.

Subiectul III

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{mx}{x^2+1}$.

a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei m.

b) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f'(0)=1$.

c) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $|f(x)|\le 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

2. Considerăm funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Calculaţi $F(1)$.

b) Arătaţi că funcţia F este inversabilă.

c) Calculaţi $\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx$.

Testul 29

Subiectul I

1. Ordonați crescător numerele $\sqrt[3]{64}$, $\lg 100$ și $\sqrt{17}$.
2. Arătați că $4x^2 + 3x + 1 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{arctg}(x+1) = \frac{\pi}{4}$.
4. Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, știind că $n + 135 = C_n^2$.
5. Arătați că unghiul vectorilor $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ este obtuz.
6. În triunghiul ABC avem $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Calculați lungimea medianei din A.

Subiectul II

1. Pentru fiecare număr real x considerăm matricea $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
c) Determinați inversa matricei $A(\frac{\pi}{4})$.

2. Considerăm ecuația cu coeficienți reali $2x^3 + x^2 - 13x + m = 0$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
a) Rezolvați ecuația pentru $m = 0$.
b) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $x_1x_2 = 1$.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{x}$.
a) Arătați că funcția este strict monotonă.
b) Determinați asimptotele graficului funcției f.
c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.

2. Fie funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
a) Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.
b) Calculați $\int_1^e e^x(f(x) + f'(x))\,dx$.
c) Arătați că $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_t^1 f(x)\,dx = -1$.

Testul 30

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z = -3 + 4i$.
2. Aflați punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ cu axa Ox.
3. Rezolvați ecuația $\log_5 x = \log_{25} 2x$.
4. Calculați $C_7^3 - A_6^2$.
5. Aflați $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1: x - 2y = 0$ și $d_2: ax + y + 5 = 0$ sunt paralele.
6. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \cos x = 1$. Calculați $\sin 2x$.

Subiectul II

1. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.
a) Calculați $\det A$.
b) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\operatorname{rang} A = 2$.
c) Calculați A^{-1} pentru $a = 0$.

2. Considerăm polinomul $f = X^4 + X^2 - X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.
a) Calculați restul împărțirii lui f la polinomul $g = X^2$.
b) Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.
c) Arătați că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

Subiectul III

1. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.
a) Arătați că funcția f este continuă în punctul $x = 1$.
b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.
c) Arătați că $f'(x) \leq 0$, oricare ar fi $x > 0$.

2. Fie M mulțimea funcțiilor continue $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ cu $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
a) Arătați că funcția $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ aparține mulțimii M.
b) Funcția $h: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + x + a$ aparține lui M. Determinați $a \in \mathbb{R}$.
c) Demonstrați că pentru orice funcție $f \in M$ există $c \in [0, 1]$ astfel încât $f(c) = c$.

Testul 31

Subiectul I

1. Fie $a = \sqrt[3]{1024}$, $b = \sqrt[3]{4}$ şi $c = \sqrt{4}$. Verificaţi dacă $ab = c^4$.
2. Determinaţi imaginea funcţiei $f: [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.
3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} = 0$.
4. Determinaţi numărul elementelor unei mulţimi M ştiind că M are 32 de submulţimi cu un număr impar de elemente.
5. Fie ABC un triunghi echilateral de latură $\sqrt{3}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AC}$.
6. Arătaţi că $\sin x \cdot \sin(x + \pi) \le 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Calculaţi A^3.
   b) Determinaţi rangul matricei $A \cdot A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.
   c) Demonstraţi că nu există nicio matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $B^2 = A$.
2. Considerăm polinomul $f = (X^{10} - 2)^{10} - X - 2 \in \mathbb{C}[X]$.
   a) Calculaţi suma coeficienţilor polinomului f.
   b) Calculaţi suma tuturor rădăcinilor complexe ale lui f.
   c) Demonstraţi că polinomul $g = X^{10} - X - 2$ divide f.

Subiectul III

1. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-x}$.
   a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.
   b) Arătaţi că $f(x) \le \frac{1}{e}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
   c) Demonstraţi că $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n) \cdot e^{-x}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$.
2. Pentru fiecare număr $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+3}\,dx$.
   a) Calculaţi I_2.
   b) Arătaţi că $2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \ge 3$.
   c) Demonstraţi că $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n = \frac{1}{5}$.

M. ANDRONACHE • D. ŞERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

Testul 32

Subiectul I

1. Calculaţi modulul numărului complex $z = \frac{2}{1+i}$.
2. Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6$ cu dreapta de ecuaţie $y = x$.
3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_x 2 = \log_9 3$.
4. Calculaţi suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $(a + b)^{10}$.
5. Calculaţi lungimea înălţimii din A în triunghiul ABC ştiind că $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ şi $C(3, 2)$.
6. Arătaţi că $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \ge 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
   a) Arătaţi că $AX = XA$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}$.
   b) Arătaţi că $A^2 - 12A + 36 I_2 = 0_2$.
   c) Determinaţi matricele $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B^2 + B = A$.
2. Considerăm mulţimea $M = \{\cos q\pi + i \sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
   a) Arătaţi că dacă $x, y \in M$, atunci $xy \in M$.
   b) Demonstraţi că M formează grup cu înmulţirea numerelor complexe.
   c) Arătaţi că funcţia $f: (\mathbb{Q}, +) \to (M, \cdot)$, $f(q) = \cos q\pi + i \sin q\pi$ este morfism de grupuri.

Subiectul III

1. Considerăm şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1 = \frac{9}{2}$ şi $x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20$, $n \ge 1$.
   a) Arătaţi că $x_n \ge 4$, oricare ar fi $n \ge 1$.
   b) Arătaţi că $x_{n+1} - x_n \le 0$, oricare ar fi $n \ge 1$.
   c) Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ converge la 4.
2. Considerăm funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$.
   a) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este injectivă.
   b) Calculaţi $\int_0^{\pi/2} f(x) \cos x \, dx$.
   c) Calculaţi $\int_0^{\pi/4} f(x)\, dx$.

MATEMATICĂ – M1

Testul 33

Subiectul I

1. Calculați partea fracționară a numărului $x = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 + x > 12$.

3. Arătați că funcția $f: [1, 2] \to [3, 4]$, $f(x) = 5 - x$ este inversabilă.

4. Determinați termenul dezvoltării $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^9$ ce nu îl conține pe x.

5. Punctele A, B, C, D verifică $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Arătați că B, C și D sunt coliniare.

6. Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos a = -\frac{1}{3}$, calculați $\sin 2a$.

Subiectul II

1. Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ ax + y - 2z = 1 \\ -x + 3y + z = b \end{cases}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul sistemului.
b) Determinați a și b pentru care $(1, 0, -1)$ este soluție a sistemului.
c) Determinați a și b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

2. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix} \middle| \, a \in (-1, \infty) \right\}$.

a) Arătați că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.
b) Demonstrați că M formează grup în raport cu înmulțirea matricelor.
c) Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to M$, $f(a) = \begin{pmatrix} 2a-1 & a-1 \\ -2a+2 & 2-a \end{pmatrix}$ este izomorfism de la grupul multiplicativ al numerelor reale nenule la grupul $(M, \cdot)$.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x+1}$.

a) Calculați derivata funcției f.
b) Determinați asimptotele graficului funcției f.
c) Determinați punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta $y = 2x$.

2. Fie $A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$ și $B = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$.

a) Calculați $A + B$.
b) Arătați că $A = B$.
c) Calculați A.

Testul 34

Subiectul I

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $2^a = 3$ și $3^b = 4$. Calculați ab.

2. O funcție f de grad 1 are $f(0) = 2$ și $f(4) = -4$. Calculați $f(1)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din mulțimea $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, să avem $a + b = 5$.

5. Determinați ecuația dreptei ce trece prin origine și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x + 3y + 5 = 0$.

6. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC știind că $AB = 5$, $AC = 8$ și $BC = 7$.

Subiectul II

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați C^{-1}.
b) Arătați că $AC = CB$.
c) Demonstrați că $B^n = C^{-1} \cdot A^n \cdot C$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie polinomul $P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $f = X^2 + 3X + 3$ divide P.
b) Calculați $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2$.
c) Demonstrați că oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, polinomul P nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x + 1$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.
b) Arătați că funcția f este surjectivă.
c) Calculați $(f^{-1})'(2)$.

2. Considerăm funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Calculați $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{f(x)}\,dx$.
b) Calculați $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$.
c) Calculați aria subgraficului funcției f.

Testul 35

Subiectul I

1. Considerăm progresia aritmetică $a_n = 1 + 7n, n \geq 1$. Calculați suma primilor 10 termeni.
2. Arătați că graficele funcțiilor $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -2x^2 + 4x - 7$ nu au puncte comune.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
4. Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că $n^2 - 4n = C_7^2$.
5. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Calculați $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$.
6. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC în care $AB = AC = 4$ și $BC = 6$.

Subiectul II

1. Se dau dreptele $d_1: x + y - 2 = 0$, $d_2: 2x - y - 1 = 0$ și $d_3: -3x + my - 1 = 0$, cu $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & m & -1 \end{vmatrix}$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente.

c) Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -3x + my - z = 0 \end{cases}$ știind că dreptele d_1, d_2, d_3 nu sunt concurente.

2. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & b \\ 0 & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

a) Arătați că $X + Y \in M$, oricare ar fi $X, Y \in M$.
b) Arătați că $XY \in M$, oricare ar fi $X, Y \in M$.
c) Demonstrați M formează inel cu adunarea și înmulțirea matricelor.

Subiectul III

1. Pentru fiecare $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ considerăm funcția $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = a^x - x - 1$.

a) Calculați $f_a'(0)$.
b) Determinați valorile lui a pentru care graficul funcției are asimptotă la $+\infty$.
c) Determinați valorile lui a știind că $f_a(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n \frac{x}{2}\, dx$, $n \geq 1$.

a) Calculați I_1.
b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \geq 1$.
c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Testul 36

Subiectul I

1. Considerăm mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 12\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii $A - B$.
2. Determinați coordonatele punctului situat la intersecția graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| - 4$, cu prima bisectoare a sistemului de coordonate xOy.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{2x+1} + 9^x = 36$.
4. Determinați valorile lui n pentru care $C_{10}^n = C_9^n + C_9^7$.
5. Determinați distanța dintre dreptele paralele $d_1: y = x$ și $d_2: y = x + 1$.
6. În triunghiul ABC avem $AB = 2$, $AC = 3$ și $A = 120°$. Calculați raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul II

1. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3.
b) Determinați inversa matricei A^5.
c) Rezolvați ecuația $X^2 = A$ în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Considerăm polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 3X + m \in \mathbb{C}[X]$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.
b) Determinați $m \in \mathbb{C}$ știind că rădăcinile polinomului sunt în progresie aritmetică.
c) Determinați $m \in \mathbb{C}$ știind că rădăcinile polinomului sunt în progresie geometrică.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.
b) Demonstrați că există $c \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, astfel încât $f(c) = 0$.
c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n^2}$.

2. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$.

a) Calculați $\int_1^4 f(x)\, dx$.
b) Calculați $\int_1^2 x f(x^2)\, dx$.
c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \int_1^x f(t)\, dt$.

Testul 37

Subiectul I

1. Fie $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\in\mathbb{C}$. Arătați că $z^2+\bar{z}\in\mathbb{R}$.

2. Determinați valorile reale ale numărului m știind că $x^2+x+m\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to[1,\infty)$, $f(x)=1+x^4$ este surjectivă.

4. Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(1+\sqrt{3})^{100}$.

5. Simetricul punctului $A(1, 2)$ față de $B(4, a)$ este $C(b, 4)$. Calculați $a+b$.

6. Fie $x\in\mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Subiectul II

1. Fie A matricea pătratică de ordin 3 cu toate elementele egale cu 1.

a) Calculați $\det(A-3I_3)$.

b) Aflați $n\in\mathbb{N}$ știind că $\det(A^n+I_3)=82$.

c) Determinați inversa matricei I_3+A.

2. Considerăm mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a-4b & 5b\\ -5b & a+4b\end{pmatrix}\middle|\ a^2+9b^2=1, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Verificați dacă matricea $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \frac{8}{5}\end{pmatrix}$ aparține lui G.

b) Arătați că dacă $X, Y\in G$, atunci $XY\in G$.

c) Demonstrați că G formează grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

b) Arătați că $(x^2+1)f''(x)f(x)=f'(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați asimptota graficului funcției f către $+\infty$.

2. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

Testul 38

Subiectul I

1. Mulțimile A și B au fiecare câte 7 elemente, iar mulțimea $A\cup B$ are 10 elemente. Determinați numărul elementelor mulțimii $A\cap B$.

2. Punctul $V(-1, 1)$ este vârful parabolei $y=x^2+ax+b$. Calculați $2a+b$.

3. Rezolvați ecuația $\lg^2 x^2=1$.

4. Determinați numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1, 2, 3, 4\}\to\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. Dreptele $d_1: y=x$, $d_2: y=2x+1$ și $d_3: x+ay+1=0$ sunt concurente. Determinați a.

6. Fie ABC un triunghi în care $A=30°$, $B=75°$ și $AB=4$. Calculați raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul II

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că matricea $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ verifică $XA=BX$.

b) Demonstrați că $B^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați A^{100}.

2. Fie polinomul $f=2X^3-3X^2-X+5\in\mathbb{C}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Determinați câtul și restul împărțirii lui f la polinomul $g=2X-1$.

b) Calculați $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

c) Calculați $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}$.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

b) Arătați că funcția f este surjectivă.

c) Demonstrați că graficul funcției nu admite asimptote.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm funcția $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin nx}{\sin x}, & x\neq 0\\ n, & x=0\end{cases}$.

Notăm $I_n=\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_2.

b) Arătați că $I_{n+2}-I_n=\frac{2}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați I_{2013}.

Testul 39

Subiectul I

1. Dați exemplu de număr real x astfel încât $\sqrt{2}+x$ să fie număr rațional nenul.

2. Pentru ce valori reale ale lui m funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+mx+3$ este crescătoare pe intervalul $[2,\infty)$?

3. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\arcsin x \le \frac{\pi}{4}$.

4. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $7\cdot n! < 1000$.

5. Fie punctele $A(1,2)$, $B(3,1)$ și $C(-1,4)$. Calculați lungimea medianei din A în triunghiul ABC.

6. Demonstrați că $\sin 4 < 0$.

Subiectul II

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

a) Calculați rangul matricei A.

b) Determinați $u, v\in\mathbb{R}$ pentru care $A^3=uA^2+vA$.

c) Determinați o matrice nenulă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX=O_3$.

2. Considerăm polinomul $f=X^3-6X^2+9X+m\in\mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați $m\in\mathbb{Q}$ știind că $X-1$ divide f.

b) Determinați rădăcinile polinomului pentru $m=-4$.

c) Aflați valorile lui $m\in\mathbb{Q}$ pentru care polinomul f are o rădăcină dublă.

Subiectul III

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$.

a) Arătați că funcția f nu este derivabilă în $x\in\{-1,1\}$.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Pentru $p,q\in\mathbb{N}$, $p,q\ge 2$, notăm $I(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

a) Calculați $I(3,3)$.

b) Demonstrați că $I(p,q)=I(q,p)$, oricare ar fi $p, q\ge 2$.

c) Arătați că $p\cdot I(p,q)=(q-1)\cdot I(p+1,q-1)$, oricare ar fi $p,q\in\mathbb{N}$, $p\ge 2$, $q\ge 3$.

Testul 40

Subiectul I

1. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că $(a, a+1)\cap(0,1)\ne\varnothing$.

2. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de gradul 2 știind că $f(0)=0$, $f(1)=1$ și $f(2)=8$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin 2x = 2\cos^2 x$.

4. Determinați coeficientul lui x^2 din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^6$.

5. Considerăm punctele $A(1,0)$, $B(3,2)$, $C(-1,3)$. Calculați cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$.

6. Determinați semnul numărului $\cos 2\cdot\cos 4$.

Subiectul II

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^{-1}.

b) Arătați că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$, pentru orice număr natural $n\ge 2$.

c) Calculați A^{100}.

2. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

a) Arătați că $X-Y\in M$, oricare ar fi $X, Y\in M$.

b) Arătați că $X\cdot Y\in M$, oricare ar fi $X, Y\in M$.

c) Demonstrați că M formează corp împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor.

Subiectul III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-12x^2+1$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x^2\right)$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției f în jurul axei Ox.

c) Calculați aria subgraficului funcției f.

Soluții M1

Partea 1. ALGEBRĂ/GEOMETRIE (clasele IX-X)

Tema 1.1 Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. ***a)*** Propoziția este falsă, contraexemplu $x=2,5$ și $y=2,5$. ***b)*** Propoziția este falsă, contraexemplu $x=\frac{1}{3}$. ***c)*** Propoziția este falsă, contraexemplu pentru $x=1000$ $x^2+y^2\neq 2012$ $\forall y\in\mathbb{R}$.
2. Propoziția este falsă, contraexemplu $x=1+\sqrt{2}$ și $y=1-\sqrt{2}$ sunt iraționale, iar suma lor este egală cu 2. **3.** ***a)*** $\left[\sqrt{2012}\right]+\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left\{-\sqrt{2}\right\}=44+\left(2+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+2\right)=42$.
b) $\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right]=\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right]=0$. ***c)*** $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}=$ $=44+3\left(\frac{-1}{3}-(-1)\right)=46$. ***d)*** $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{100}\right]=3\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 3+\ldots+19\cdot 9+10=625$.
e) $\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2\right]=10+\left[2\sqrt{21}\right]=19$. **4.** ***a)*** $x\in\left[k,k+\frac{1}{2}\right),\ k\in\{0;1;2\}\Rightarrow A=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\{2\}$.
b) $\{x\}=\frac{1}{3}\Rightarrow B=\left\{\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right\}$. **5.** $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n\Leftrightarrow n\leq n^2+n<(n+1)^2$, inegalități care sunt evidente.
6. $x>1\Leftrightarrow\frac{1}{x}\in(0,1)\Leftrightarrow\left[\frac{1}{x}\right]=0$. **7.** ***a)*** $\{\{x\}+y\}=\{x-[x]+y\}=\{x+y\}=\{x+\{y\}\}$.
b) $\{\{x+y\}+z\}=\{x+y+z\}=\{x+\{y+z\}\}$. **8.** ***a)*** Fie $k\in\mathbb{Z}$. Pentru $x\in\left[k,k+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow[x]=k$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k$ și $[2x]=2k$, deci egalitatea este evidentă. Pentru $x\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right)\Rightarrow[x]=k$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+1$ și $[2x]=2k+1$, deci egalitatea este evidentă. ***b)*** Dacă $x=-a$ avem $[-a+b]=0\Rightarrow b\geq a$. Pentru $x=-b$, avem $[a-b]=0\Rightarrow b\leq a$. În final $a=b$.
9. Pentru $x\neq 0$ inecuația $\left(m^2-1\right)x+2\leq 0$ are cel puțin o soluție, deci $x=0$.
10. $\left\{x\in\mathbb{R}\mid(x+2)\left(x^2-4\right)\geq 0\right\}=\{-2\}\cup[2,+\infty)$, deci elementul căutat este egal cu -2.
11. $A=\left[1,\frac{10}{3}\right]$, deci $B=\{0,1,2\}$ cu maximul egal cu 2. **12.** $A\cap\mathbb{N}=\{1,2\}$. **13.** $A=(-2,2)\Rightarrow A\cap B\cap\mathbb{Z}=\{-1\}$. **14.** $card(A)=26$, $card(B)=17$, $card(A\cap B)=9$ și $card(A\cup B)=$ $card(A)+card(B)-card(A\cap B)=34$. **15.** $\frac{1}{7}=0,(142857)\Rightarrow card(A)=6$. **16.** $\frac{4}{11}=0,(36)$ deci suma cerută este egală cu 10. **17.** $\frac{10}{13}=0,(769230)\Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_{2012}=335\cdot(7+6+9+2+3+0)+7+6=9058$.
18. Numerele 1 și 2 sunt printre rădăcinile ecuației $x^2+mx+4=0$, deci $m\in\{-5,-4\}$. **19.** **Soluția 1.** Înlocuind soluțiile 1 și 2 în ecuația $x^2+mx+n=0$, obținem sistemul $\begin{cases}m+n+1=0\\2m+n+4=0\end{cases}\Rightarrow(m,n)=(-3,2)$. **Soluția 2.** $n=x_1\cdot x_2=2$ și $-m=x_1+x_2=3$. **20.** Observăm că soluțiile întregi ale ecuației se găsesc printre divizorii lui 4, deci soluțiile posibile sunt 1,2 sau 4, adică $a\in\{4,5\}$. **21.** ***a)*** $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}\in A$, $\left\{\sqrt{3}\right\}=\sqrt{3}-1\in A$. ***b)*** Fie $x=a+b\sqrt{3}$, $y=c+d\sqrt{3}\in A$. $xy=ac+3bd+\sqrt{3}(ad+bc)\in A$. ***c)*** Prin inducție se arată ușor că, dacă $x\in A$, atunci $x^n\in A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Fie acum $x=\sqrt{3}-1$, $[x]=0\Rightarrow$ $\left\{x,x^2,\ldots,x^{2012}\right\}\subset A$, deci A are cel puțin 2012 elemente. **22.** Presupunem că există $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}\Rightarrow$ $\left(\sqrt{3}-b\sqrt{2}\right)^2=a\Rightarrow$ $a^2=3+2b^2-2b\sqrt{6}$ $\Rightarrow b=0$ și $a=\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$, contradicție. **23.** $x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=0\Rightarrow$ $\Rightarrow(x,y)=(0,0)$. **24.** $x^2+3xy+4y^2=\left(x+\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{13y^2}{4}\geq 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. **25.** $x^2+y^2+z^2+4x+$ $+6y-2z+14=(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=0\Rightarrow x=-2,y=-3,z=1\Rightarrow x+y+z=-4$.
26. ***a)*** $.\,x^2+y^2+z^2-(xy+xz+yz)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right]=0\Rightarrow.\,x=y=z$. ***b)*** În a) luăm $x=a$, $y=b$ și $z=2$, deci $a=b=2$. **27.** ***a)*** Se aplică inegalitatea mediilor pentru numerele $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$. ***b)*** Înmulțim între ele inegalitățile $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ și $a+c\geq 2\sqrt{ac}$ și obținem inegalitatea cerută. **28.** ***a)*** $\frac{\sqrt{x-1}}{x}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq 2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\geq 0$. ***b)*** Împărțim inegalitatea cu xy și obținem inegalitatea $\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{y}\leq 1$, care este adevărată din a). **29.** Cum $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{b}\geq 0$, avem trei cazuri: $\sqrt{a}=0$, $\sqrt[4]{b}=2\Rightarrow a=0,b=16$ sau $\sqrt{a}=1$, $\sqrt[4]{b}=1\Rightarrow a=1,b=1$ sau $\sqrt{a}=2$, $\sqrt[4]{b}=0\Rightarrow a=4,b=0$. Deci $A=\{(0,16),(1,1),(4,0)\}$. **30.** De exemplu $a=1$ și $b=1$. **31.** De exemplu $a=\sqrt{2}$ și $b=-\sqrt{2}$. **32.** De exemplu $(0,1,9)$. **33.** ***a)*** $\ln 2<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.
b) $\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. ***c)*** $\frac{1}{2}<\sqrt{5}<\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. ***d)*** $\frac{1}{2}<\log_3 2<\ln 2<1<\sqrt{3}$.

Tema 1.2 Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)

1. $a_{n+1}-a_n=\frac{4n+4}{n+4}-\frac{4n}{n+3}=\frac{12}{(n+4)(n+3)}>0$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.
2. $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-(n+1)-n^2+n=2n>0$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.
3. ***a)*** $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ldots-\frac{1}{2n}==\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}>0$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător. ***b)*** $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. ***c)*** $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător.
4. ***a)*** $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, de unde mărginirea șirului. ***b)*** $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}\in(0,1)$. ***c)*** $x_n=\frac{1}{n+1}\in(0,1)$.

5. ***a)*** Fie r rația progresiei. $a_{23}-a_5=18r=36\Rightarrow r=2$. $a_5=a_0+5r=7\Rightarrow a_0=-3$. $a_{13}=a_0+13r=23$. ***b)*** $a_n=2015=-3+2n\Rightarrow n=1009$, deci $2015=a_{1009}$. ***c)*** $T=a_2+a_5+a_8+...+a_{2012}=$ $=\frac{671}{2}(a_2+a_{2012})=671\cdot 2011=1349381$. **6.** Fie r rația progresiei. $a_4-a_2=4=2r\Rightarrow r=2$. $a_1+a_3+a_5+a_6=30=4a_1+11r\Rightarrow a_1=2$. $S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=420$. **7.** $2(x-1)^2=x+(x+2)\Rightarrow x_1=0;\ x_2=3$.

8. $2(1-x)=(x+1)+4\Rightarrow x=-1$ **9.** $2(2^{-a+2}+1)=2^{a-1}+2^{a+1}+1$, și notând $2^a=t>0$ obținem ecuația $2\left(\frac{4}{t}+1\right)=\frac{t}{2}+2t+1\Rightarrow t_1=-\frac{8}{5}, t_2=2$, deci $a=1$. **10.** ***a)*** În sumă sunt $\frac{100-1}{3}+1=34$ termeni, deci $1+4+7+...+100=\frac{34}{2}(1+100)=1717$. ***b)*** În sumă sunt $\frac{2010-2}{4}+1=503$ termeni, deci $2+6+10+...+2010=\frac{503}{2}(1+2010)=503\cdot 1006=506018$. ***c)*** În sumă sunt $\frac{2n+3-1}{2}+1=n+2$ termeni, deci $1+3+5+...+(2n+3)=(n+2)^2$. ***d)*** În sumă sunt n termeni, deci $1+5+9+...+(4n-3)=\frac{n}{2}(4n-2)=2n^2-n$. **11.** Suma cerută este egală cu $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$. **12.** $a_{n+1}=(a_1+a_2+...+a_{n+1})-(a_1+a_2+...+a_n)=2n+2\Rightarrow a_n=2n$, obținem deci un șir în progresie aritmetică. **13.** ***a)*** Forma generală a termenilor din sumă este $4n-3,\ n\geq 1$. Fie $x=4n-3\Rightarrow 1+5+9+...+(4n-3)=\frac{n}{2}(1+4n-3)=2n^2-n=231\Rightarrow n=11\Rightarrow x=41$. ***b)*** Fie $x=2n-1,\ n\geq 1$. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2=225\Rightarrow n=15\Rightarrow x=29$. ***c)*** $x+(x+1)+...+(x+x)=$ $=\frac{x+1}{2}(3x)=45\Rightarrow x(x+1)=30\Rightarrow x=5$. ***d)*** Fie $x=3n-1,\ n\geq 1$. $2+5+8+...+(3n-1)=$ $=\frac{n}{2}(3n+1)=57\Rightarrow n=6\Rightarrow x=17$. **14.** Rația progresiei aritmetice este egală cu 3, primul termen este 1, deci $a_{10}=28$. **15.** $a_6+a_{16}=a_3+a_{19}=10$. **16.** ***a)*** $a_2+a_3+a_{19}+a_{20}=8=2(a_1+a_{21})\Rightarrow$ $\Rightarrow a_1+a_{21}=4$. $a_1+a_2+...+a_{21}=\frac{21}{2}(a_1+a_{21})=42$. ***b)*** $a_2+a_4+...+a_{20}=\frac{10}{2}(a_2+a_{20})=5(a_1+a_{21})=20$.

17. ***a)*** $a_1+a_4+a_{n-3}+a_n=2(a_1+a_n)=300\Rightarrow a_1+a_n=150$. $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\cdot 150=600\Rightarrow n=8$. ***b)*** $S_{3n}=9S_n\Rightarrow \frac{3n}{2}(2a_1+(3n-1)r)=\frac{9n}{2}(2a_1+(n-1)r)\Rightarrow r=2a_1$. $a_4=a_1+3r=7a_1=21$ $\Rightarrow a_1=3$. **18.** $b=\frac{a+c}{2}$ și $b^2=ac\Rightarrow ac=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\Rightarrow(a+c)^2=4ac\Rightarrow(a-c)^2=0\Rightarrow a=c=b$.

19. $a-17=17-2=15\Rightarrow a=32$ și $2b=a^2\Rightarrow b=512$. **20.** Fie q rația progresiei geometrice. $a+b+c=a(1+q+q^2)=a[1+q(q+1)]$ și cum $1+q(q+1)$ este număr par, rezultă că a este număr par, de unde concluzia. **21.** $(x-1)^2=x+5\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=4$, deci $x=4$. **22.** Cum $a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow x_1,x_2\neq 0$. $x_2^2=3x_1x_2\Rightarrow x_2=3x_1\Rightarrow x_1+x_2=4x_1=4\Rightarrow x_1=1\Rightarrow a=3$. **23.** Avem $x_2^2=x_1x_2^2\Rightarrow x_1=1\Rightarrow a=-3$.

24. Șirul este o progresie geometrică cu rația 2, deci $4=a_3=a_02^3\Rightarrow a_0=\frac{1}{2}$. **25.** Fie q rația progresiei geometrice $\frac{b_3}{b_1}=\frac{24}{6}=q^2\Rightarrow q=2\Rightarrow b_1=3$. **26.** Evident $s>1$. Pe de altă parte $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}=\frac{1-\frac{1}{2^{101}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right)<2$. **27.** $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{2012}}=$ $=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2013}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2013}}\right)>\frac{2}{3}$ **28.** $a=\frac{1-\frac{1}{5^{11}}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{11}}\right)\in(1,2)\Rightarrow[a]=1$; $b=\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{12}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=$ $=\frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{5^{12}}\right)\in(0,1)\Rightarrow[b]=0$. În final $[a]+[b]=1$. **29.** Dacă $x=1$, egalitatea din enunț este echivalentă cu $12^2-1=11\cdot 13$ evident adevărată. Dacă $x\neq 1$, egalitatea este echivalentă cu $\left(\frac{1-x^{12}}{1-x}\right)^2-x^{11}=\frac{1-x^{11}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{13}}{1-x}\Rightarrow(1-x^{12})^2-x^{11}(1-x)^2=(1-x^{11})(1-x^{13})$, egalitate care se verifică imediat.

30. Fie q rația progresiei geometrice, $\frac{b_3+b_4}{b_1+b_2}=\frac{b_3(1+q)}{b_1(1+q)}=q^2=4\Rightarrow q=2$. **31.** ***a)*** Fie q rația progresiei. $b_4-b_0=b_0(q^4-1)=b_0(1+q^2)(q^2-1)=3(1+q^2)=15\Rightarrow q^2=4\Rightarrow q=2\Rightarrow b_0=1\ b_2=4$. ***b)*** Suma are 9 termeni, deci $S_8=b_0\frac{1-q^9}{1-q}=511$. **32.** $a_2-a_1=r\in\mathbb{Z}$. Dacă presupunem că $r<0,\ \exists k\in\mathbb{N}^*:\ a_{k+1}=a_1+kr<0$ contradicție. Deci $r\geq 0$. **33.** Rația progresiei este $q=\frac{b_2}{b_1}\in\mathbb{Q}$. Presupunem că $q\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Fie $q=\frac{a}{b}$ scrierea ca fracție ireductibilă, $a>1$ și $b_1=a^p\cdot\alpha,\ (a,\alpha)=1,\ p\in\mathbb{N}$. Avem $b_{p+2}=b_1q^{p+1}=a^p\alpha\frac{b^{p+1}}{a^{p+1}}=\alpha\frac{b^{p-1}}{a}\notin\mathbb{N}$, contradicție. **34.** Fie q rația progresiei, deci $\frac{b_5}{b_3}=q^2=4\Rightarrow b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow b_7=b_1q^6=96$. **35.** $f(2)+f(2^2)+...+f(2^9)=$ $=2+2^2+...+2^9+9=2\frac{2^9-1}{2-1}+9=1031$. **36.** $S_1=3(1-3+3^2-3^3+...+3^{10})+11=3\frac{1-(-3)^{11}}{1-(-3)}+11=$ $=\frac{3}{4}(1+3^{11})+11$. Termenii din suma S_2 sunt în progresie aritmetică cu rația 3, $S_2=\frac{12}{2}(f(0)+f(11))=210$. **37.** ***a)*** $S_1=\underbrace{(-5)+(-5)+...+(-5)}_{25\text{ ori}}+f(50)=-125+250-1=124$.

b) Termenii sumei sunt în progresie aritmetică, deci $S_2=\frac{51}{2}(f(0)+f(50))=51\cdot 124=6324$.

c) $S_3=5(1-2+2^2-2^3+...-2^9)=\frac{5}{3}(1-2^{10})$.

Tema 1.3 Funcţii. Proprietăţi generale. Lecturi grafice.

1. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2}\right\}+\{1\}=\frac{1}{2}\neq f(0)=0$. **2.** $f\left(x+\frac{1}{3}\right)=\left\{3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}=\{3x+1\}=\{3x\}=f(x)$.

3. *a)* $f(x+2)=\left\{\frac{x+2}{2}\right\}+\{x+2\}=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\{x\}=f(x)\Rightarrow 2$ este perioadă pentru funcţia f. *b)* $g(x+6)=\left\{\frac{x+6}{2}\right\}+\left\{\frac{x+6}{3}\right\}=g(x)\Rightarrow 6$ este perioadă pentru g. **4.** $1-a^2=0\Rightarrow a=\pm1$ **5.** $f(x)=4|x-2|-4|2-x|=0$, deci f este constantă. **6.** Pentru $x\in[3,8]$, $f(x)=(8-x)+(x-3)=5$. **7.** Pentru $x\in(0,+\infty)$ $\frac{x}{x^2+1}\in(0,1)\Rightarrow f(x)=0$. **8.** $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{y-x}{(x-y)(x-1)(y-1)}=$ $=\frac{-1}{(x-1)(y-1)}<0$, $\forall x,y\in(1,+\infty)$, $x\neq y$, deci f este descrescătoare. **9.** $f(g(x))=g(f(x))$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2(x+a)-1=2x-1+a\Leftrightarrow a=0$. **10.** $f(f(f(x)))=3-8x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare. **11.** $f(f(0))=f(0)=0$. **12.** $f(x)=0\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow x_1=0,x_2=1,x_3=-1$. Punând condiţia $g(x_i)=0$, $i=\overline{1,3}\Rightarrow a\in\{-1,1\}$. **13.** $f(x)\le2\Rightarrow x(x^2-4)\le0\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[0,2]=A$, deci $\max A=2$. **14.** $f(a)=a\Leftrightarrow a^3-9a=0\Leftrightarrow a\in\{-3,0,3\}$, deci suma cerută este egală cu 0.

15. Punem condiţia ca ecuaţia $f(x)=y$ să admită soluţii reale $\Leftrightarrow$ $x^2(y-1)-x(y+1)+y-1=0$ $\Leftrightarrow\Delta\ge0\Leftrightarrow(-y+3)(3y-1)\ge0\Leftrightarrow y\in\left[\frac{1}{3},3\right]$, deci $\operatorname{Im}f=\left[\frac{1}{3},3\right]$. **16.** Ecuaţia $|x|=y$ admite soluţii reale dacă şi numai dacă $y\in[0,+\infty)$, deci $\operatorname{Im}f=[0,+\infty)$. **17.** $(f\circ g)(x)=x^2-1$, deci imaginea funcţiei $f\circ g$ este $[-1,+\infty)$. $(g\circ f)(x)=(x-1)^2$, deci imaginea funcţiei $g\circ f$ este $[0,+\infty)$. **18.** *a)* $1\notin\operatorname{Im}f\Leftrightarrow$ ecuaţia $f(x)=1$ nu are nicio soluţie, ceea ce este adevărat. *b)* $f(1)=\frac{1}{2}$ şi în plus $f(x)=\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci $\max(f)=\frac{1}{2}$, punctul de maxim fiind $x=1$. *c)* $f(-1)=\frac{-1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\in\operatorname{Im}f$. **19.** $f(1)=-1$ şi în plus $x^4-2x^2=(x^2-1)^2-1\ge-1\Leftrightarrow$ $f(x)\ge-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **20.** *a)* $x\in f^{-1}(\{0;2\})\Leftrightarrow f(x)\in\{0;2\}\Leftrightarrow x\in\{\pm1,\pm\sqrt{3}\}=f^{-1}(\{0;2\})$. *b)* $f(x)\in(3,+\infty)\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)=f^{-1}((3,+\infty))$ *c)* $f(x)\in[3,8]\Leftrightarrow$ $x^2\in[4,9]\Leftrightarrow x\in[-3,-2]\cup[2,3]=f^{-1}([3;8])$. *d)* Ecuaţia $f(x)=m$ are o sigură rădăcină dacă şi numai dacă $m=-1$.

21. Punem condiţiile $f(1)=0$ şi $f(0)=-1$, deci $n=-1$ şi $m=0$. **22.** *a)* . $f(-x)=-x^3+\frac{1}{x}=$ $-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. *b)* $f(-x)=-x^3+\frac{2^{-x}+2^x}{-x}=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. *c)* $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *d)* $f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=$

$-f(x)$, $\forall x\in(-3,3)$. **23.** Punem condiţia $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow -x\left(e^{-x}+e^x\right)+a=$ $=-\left[x\left(e^x+e^{-x}\right)+a\right]\Leftrightarrow a=0$. **24.** Avem $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(1)=f(-1)\Leftrightarrow a+b+4=$ $-(a+b)+4\Leftrightarrow a+b=0$. **25.** Dacă f este funcţie pară, atunci $f(1)=f(-1)$, deci f nu este injectivă. **26.** $f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow O(0,0)\in G_f$. **27.** $f(g(x))=x\Leftrightarrow 2(ax+b)+1=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. **28.** Prin inducţie după n. Pentru $n=1$ egalitatea devine $f(x)=2^1x+2^1-1$ evident adevărată. Dacă $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{-ori}}(x)=2^nx+2^n-1$, atunci $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n+1\text{-ori}}(x)=2^nf(x)+2^n-1=2^n(2x+1)+2^n-1=2^{n+1}x+2^{n+1}-1$. **29.** *a)* Funcţia f este strict crescătoare, fiind suma a două funcţii strict crescătoare ($f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^3$ şi $f_2(x)=x+1$), deci este injectivă. *b)* $f(0)=f(1)=1$, deci f nu este injectivă. *c)* $f(0)=f(-1)$, deci f nu este injectivă. *d)* Ecuaţia $f(x)=2$ nu are nicio soluţie număr natural, deci f nu este surjectivă.

30. Arătăm că ecuaţia $f(x)=y$ are soluţie unică $\forall y\in[2,+\infty)$. $x+\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow x^2-yx+1=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}\in[1,+\infty)\Leftrightarrow x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$. **31.** Ecuaţia $f(x)=y$ are unica soluţie $x=\frac{1}{2}(1+\log_2 y)\in\mathbb{R}$, $\forall y\in(0,+\infty)$, deci $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(1+\log_2 y)$. **32.** Determinăm singura soluţie strict pozitivă a ecuaţiei $f(x)=y$, $y\in(1,+\infty)$ $\Leftrightarrow x^2+x+1-y=0\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{4y-3}}{2}>0$, $\forall y\in(1,+\infty)$, deci $f^{-1}:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f^{-1}(y)=$ $=\frac{-1+\sqrt{4y-3}}{2}$. **33.** Dacă $g(3)=a\Leftrightarrow f(a)=3\Rightarrow a=0$, $g(0)=b\Rightarrow f(b)=0\Rightarrow b=-1$. Deci $g(3)+g(0)=-1$. **34.** Pentru $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\in[5,+\infty)=\operatorname{Im}f=[a,+\infty)\Rightarrow a=5$. **35.** Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,1]$ şi strict crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $a\le-1$. **36.** Fie $f^{-1}(4)=a\Rightarrow f(a)=4=f(f(1))$ şi cum f este injectivă rezultă că $a=f(1)=2$. **37.** $f\circ f=1_{\mathbb{R}}\Leftrightarrow f(f(x))=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a^2x+ab+b=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $a=1$ şi $b=0$ sau $a=-1$ şi $b\in\mathbb{R}$. Deci perechile $(1,0)$ şi $(-1,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cu $b\in\mathbb{R}$ verifică cerinţa $f\circ f=1_{\mathbb{R}}$. **38.** *a)* $T\in H\Leftrightarrow f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi înlocuind x cu $x-T$ obţinem $f(x-T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -T\in H$. *b)* $f(x+T_1+T_2)=f(x+T_1)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow T_1+T_2\in H$.

Tema 1.4 Funcţia de gradul I. Funcţia de gradul al II-lea

1. Fie $f(x)=ax+b\Rightarrow f(1)=2, f(-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\-a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=1=b\Rightarrow f(x)=x+1$. **2.** *a)* $G_f\cap Ox=\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)\right\}\in G_g$ şi $(0,1)\in G_f\cap Oy$, deci $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ şi $g(0)=-1\Rightarrow g(x)=-2x-1$.

b) $G_f \cap Oy = \{(0,1)\} \in G_g$ și $\left(-\frac{1}{2},0\right) \in G_f \cap Ox$, deci $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ și $g(0)=1 \Rightarrow g(x)=-2x+1$.

c) $G_f \cap Oy=\{(0,1)\}$ și $\left(-\frac{1}{2},0\right)\in G_f\cap Ox$, deci $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ și $g(0)=-1\Rightarrow g(x)=2x-1$.

3. Avem $A(1,0)\in G_f\cap G_g\cap Ox$ și cum $B(0,3)\in G_g\cap Oy \Rightarrow C(2,3)\in G_f$. Deci $f(1)=0, f(2)=3 \Rightarrow \begin{cases}a+b=0\\2a+b=3\end{cases}\Rightarrow a=3,b=-3\Rightarrow f(x)=3x-3$. **4.** $\operatorname{Im} f=[-5,-1]=[a,b]\Rightarrow a=-5,b=-1$. **5.** Se impune condiția $\operatorname{Im} f=[1,7]$. Avem două cazuri $\begin{cases}f(1)=1\\f(4)=7\end{cases}$ sau $\begin{cases}f(1)=7\\f(4)=1\end{cases}$, deci $a=2,\ b=-1$ sau $a=-2,\ b=9$. **6.** $m^2-2<0\Leftrightarrow m\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. **7.** a) $\frac{m-1}{2m+2}>0\Rightarrow m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. b) $f_m(1)=0\Rightarrow m=-\frac{5}{7}$. c) Funcția f_m este descrescătoare, deci $m\in(-1,1)$. d) Funcția f_m este constantă, deci $m=1$. **8.** a) $|x+1|=2|x|\Leftrightarrow x+1=\pm2x\Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$. b) Avem condiția $x\ge0$, deci $x^2-4=\pm3x\Rightarrow x\in\{-4,-1,1,4\}\cap[0,+\infty)=\{1,4\}$. c) $\begin{cases}x+2=0\\x^2+x-2=0\end{cases}\Rightarrow x=-2$. d) Pentru $x\in(-\infty,3)\Rightarrow(3-x)+(4-x)=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}\notin(-\infty,3)$; pentru $x\in[3,4]\Rightarrow(x-3)+(4-x)=1\Rightarrow x\in[3,4]$, iar pentru $x\in(4,+\infty)\Rightarrow(x-3)+(x-4)=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}\notin(4,+\infty)$. **9.** a) $\frac{1}{x+1}-2\ge0\Leftrightarrow\frac{-2x-1}{x+1}\ge0\Leftrightarrow x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$. b) $\frac{x}{x+2}-\frac{x+1}{x-1}\le0\Leftrightarrow\frac{-4x-2}{(x+2)(x-1)}\le0\Leftrightarrow x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$. c) $\frac{x^2-16}{x(x+4)}=\frac{x-4}{x}>0\Rightarrow x\in((-\infty,0)\cup(4,+\infty))\setminus\{-4\}$. d) $(x-2)(x^2-3x+2)=(x-2)^2(x-1)\le0\Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup\{2\}$.

10. a) $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\cap\mathbb{Z}=\{1\}$. b) $x\in\left[-1,\frac{5}{2}\right]\cap\mathbb{Z}=\{-1,0,1,2\}$. c) $x^2\in(1,4)\Rightarrow x\in((-2,-1)\cup(1,2))\cap\mathbb{Z}=\varnothing$.

11. a) $x-1\in(-3,3)\Rightarrow x\in(-2,4)$. b) Pentru $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow 1-x-1-x\le4\Rightarrow x\in[-2,-1)$; pentru $x\in[-1,1]\Rightarrow1-x+x+1\le4\Rightarrow x\in[-1,1]$, iar pentru $x\in(1,+\infty)\Rightarrow x-1+x+1\le4\Rightarrow x\in(1,2]$. În final $x\in[-2,2]$. c) $x^2-1\in(-1,1)\Rightarrow x^2\in(0,2)\Rightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\setminus\{0\}$.

12. a) $x+2\in[-1,1]\Rightarrow x\in[-3,-1]\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1\}$. b) $4|3-x|\le2|x-3|\Rightarrow2|x-3|\le0\Rightarrow x\in\{3\}$.

c) Cum $x\in\mathbb{Z}$ rezultă că avem 3 cazuri: $\begin{cases}|x+2|=0\\|x^2-4|=1\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$, $\begin{cases}|x+2|=1\\|x^2-4|=0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$ și $\begin{cases}|x+2|=0\\|x^2-4|=0\end{cases}\Rightarrow x\in\{-2\}$. **13.** Ecuația $f(x)=0$ nu are soluții în intervalul $(0,+\infty)$, deci $2m-2\le0\Rightarrow m\in(-\infty,1]$. **14.** Fie $f(x)=ax+b\Rightarrow f((f(x)))=a^2x+ab+b=4x+3\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\b(a+1)=3\end{cases}$ și cum $a>0$ obținem $a=2,b=1$, deci $f(x)=2x+1$. **15.** $x\in(-4,2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

16. Notând $a=x^2+2x$ obținem ecuația $a+\frac{1}{a}=2\Rightarrow a=1\Rightarrow x^2+2x-1=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

17. $x_v=2\Rightarrow-\frac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$. **18.** Punem condiția ca ecuația $f(x)=y$ să admită soluții reale, deci $x^2+x+1-y=0\Rightarrow\Delta\ge0\Rightarrow4y-3\ge0\Rightarrow y\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$. **19.** Funcția f este descrescătoare pe $(0,2)$ și crescătoare pe $(2,+\infty)$, deci $\operatorname{Im} f=[y_v,+\infty)=[-3,+\infty)$. **20.** a) $\operatorname{Im} f=f(\mathbb{R})=[1,+\infty)\Rightarrow \operatorname{Im} f\circ f\circ f=f(f([1,+\infty)))=f([1,+\infty))=[1,+\infty)$. b) $a>x_v=1$. c) $f(m-x)=f(m+x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ dreapta $x=m$ este axă de simetrie pentru $G_f\Leftrightarrow m=x_v=1$. **21.** $x_v>0$ și $y_v>0$, deci $m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cap\left(\frac{1}{8},+\infty\right)=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$. **22.** $|y_v|=1\Leftrightarrow|a-1|=1\Leftrightarrow a\in\{0;2\}$. **23.** Fie $f(x)=ax^2+bx+c$. Avem $a-b+c=1,\ c=1,\ a+b+c=3\Rightarrow a=b=c=1$, deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$.

24. $x_v=1$ și $y_v=2\Rightarrow a=-2,\ b=3$. **25.** $x_v=2$ și $y_v=3\Rightarrow a=-4,\ b=7\Rightarrow f(x)=x^2-4x+7\Rightarrow f(3)=4$. **26.** $x_v=2\Rightarrow\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4$ și $f(1)=2\Rightarrow b=-1$. **27.** $x_v=-1\Rightarrow f(-1)=m^2-1=g(-1)=1\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$. **28.** a) $\Delta<0\Leftrightarrow4(m-1)^2-4m(m+1)=-12m+4<0\Rightarrow m\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. b) $f_2(x)=2x^2-2x+3$, iar $\operatorname{Im} f_2=[y_v,+\infty)=\left[\frac{5}{2}+\infty\right)$. c) $\operatorname{Im} g=f_2([-1,1])=\left[\frac{5}{2},7\right]$. d) $x_v=2\Rightarrow\frac{m-1}{m}=2\Rightarrow m=-1$. e) $\begin{cases}m>0\\\Delta=-12m+4<0\end{cases}\Rightarrow m\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. f) Avem două cazuri

$f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ sau $\begin{cases}\Delta\ge0\\m>0\\x_1,x_2\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(0,\frac{1}{3}\right]\\x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m}\le0\Leftrightarrow m\in\left(0,\frac{1}{3}\right].\\x_1x_2=\frac{m+1}{m}\ge0\end{cases}$

Finalizare $m\in(0,+\infty)$. **29.** $\Delta=0\Rightarrow1-4m^2=0\Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$. **30.** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2-a)+a=2x^2-a>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci $a<0$. **31.** Avem condițiile $a+1\ne0$ și $\Delta>0\Leftrightarrow9(a-1)^2-4(a+1)(a-1)>0\Leftrightarrow a\in\left((-\infty,1)\cup\left(\frac{13}{5},+\infty\right)\right)\setminus\{-1\}$ **32.** a) Dacă $a=1$ ecuația $4x+2=0$ admite soluții. Dacă $a\ne1$ avem condiția $\Delta<0\Leftrightarrow8(a+1)<0\Leftrightarrow a\in(-\infty,-1)$.

b) Dacă $a=1$ inecuația $4x+2>0$ admite soluții, deci nu convine. Dacă $a\ne1$ avem condițiile $a-1<0,\ \Delta\le0\Leftrightarrow8(a+1)\le0\Leftrightarrow a\in(-\infty,-1]$. c) $\Delta=0\Leftrightarrow a=-1$. d) $x_v=2\Rightarrow-\frac{a+1}{a-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{3}$.

33. $y_v=\frac{-\Delta}{4a}=2\Rightarrow\frac{4a+3}{4}=2\Rightarrow a=\frac{5}{4}$. **34.** Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[x_v,+\infty)$, deci punem condiția $x_v\le1\Rightarrow a\ge-\frac{1}{2}$. **35.** Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,x_v]$, deci punem condiția $x_v\ge2\Rightarrow a\ge\frac{3}{2}$. **36.** a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1\Leftrightarrow x_1x_2=x_1+x_2\Leftrightarrow m+1=-(2m+3)\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$.

b) $x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$, avem deci două cazuri: dacă $x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 4m^2 + 8m + 5 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \notin \mathbb{R}$, dacă $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$. *c)* $|x_1 - x_2| = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 5 = 1 \Rightarrow m = -1$.

d) $x_1 + 1 = x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_1 + 1 = -2m - 3 \Rightarrow x_1 = -m - 2 \Rightarrow\ -m^2 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$.

37. $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = (2m-1)(m-1) = 2m^2 - 3m + 1$ cu valoarea minimă egală cu $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{8}$. **38.** $x_1^2x_2 = x_1x_2^2 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$, dacă o rădăcină este nulă, atunci $m = -1$, iar dacă rădăcinile sunt egale atunci $\Delta = 4m^2 - 3 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **39.** $x_1x_2 < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 1)$

40. $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. **41.** Cele două ecuaţii au cel puţin o rădăcină comună. Observăm că ecuaţiile nu pot avea două rădăcini comune (nu sunt coeficienţii proporţionali). Fie α rădăcina comună. $\alpha^2 - \alpha + m = 0,\ \alpha^2 - 2\alpha + m + 10 = 0 \Rightarrow$ prin scădere $\alpha = 10 \Rightarrow m = -90$. **42.** $2a = x_1 + x_2 = -2 \Rightarrow a = -1$. **43.** *a)* $f(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \operatorname{Im} f$. *b)* $m > \max f = \frac{1}{2} = f(1)$. *c)* $n \leq \min f = -\frac{1}{2} = f(-1)$. **44.** *a)* Avem $x_2^2 + x_2 - 12 = 1 = x_1^2 + x_1 - 12$, deci $\frac{x_1}{x_2^2 + x_2 - 12} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_1 - 12} = x_1 + x_2 = -1$.

b) $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_2 - 13} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_1 - 13} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{37}{13}$. *c)* Prin inducţie (completă) după *n*. $S_0 = 2 \in \mathbb{Z}$, iar dacă presupunem $S_i \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, atunci $S_{k+1} = -S_k + 13S_{k-1} \in \mathbb{Z}$ **45.** $a = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{3}$ **46.** Luăm $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $s = x_1 + x_2 = 2$ şi $p = x_1x_2 = -2$, deci ecuaţia va fi $x^2 - 2x - 2 = 0$ **47.** $a = x_1 + x_2 = 3$, iar $x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = 3b = 6 \Rightarrow b = 2$. **48.** Din a doua ecuaţie obţinem $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ sau $\frac{x}{y} = 2$, deci obţinem soluţiile $(1,2)$ şi $(2,1)$. **49.** Adunând cele două ecuaţii obţinem $x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -5$. Pentru $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$, iar pentru $x = -5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{13}$. Soluţiile sunt $(1,1), (1,-1), (-5, \sqrt{13}), (-5, -\sqrt{13})$.

Tema 1.5 Puteri şi radicali. Ecuaţii iraţionale

1. *a)* $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} < \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} < \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4}$. *b)* $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^4} < \sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} < \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4}$. *c)* Numerele sunt $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ şi $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$. *d)* Se cunoaşte inegalitatea mediilor $\max\{a, b\} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \geq \min\{a, b\}$, $a, b \in (0, +\infty)$ cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b$. Luăm $a = \sqrt{2}$ şi $b = \sqrt{3}$, deci $\sqrt{3} > \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} > \sqrt[4]{6} > \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} > \sqrt{2}$.

2. $\left[\sqrt[n]{n}\right] = 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} \in [1, 2) \Leftrightarrow 1 \leq n < 2^n$, inegalitate adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

3. $a = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 4$. **4.** $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 14$. $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 52$.

5. Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 2)$ şi cum $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < 2 \Rightarrow f(1) > f\left(\sqrt{2}\right) > f\left(\sqrt[3]{3}\right)$. **6.** $\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a \ldots \sqrt{a}}}}}_{n \text{ radicali}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}} = a^{\frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}} = a^{\frac{2^n - 1}{2^n}} \in \mathbb{N}$.

Alegem, de exemplu $a = 2^{2^n}$.

7. $x = \sqrt{5 - a} + \sqrt{4 + a} \Rightarrow x^2 = 9 + 2\sqrt{5 - a}\sqrt{4 + a} \Rightarrow \sqrt{5 - a}\sqrt{4 + a} = \frac{x^2 - 9}{2}$.

8. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}} = 2^{1 - \frac{1}{2^4}} \in (1, 2)$.

9. $1 < \sqrt{6\sqrt[3]{6\sqrt[4]{6 \ldots \sqrt[n]{6}}}} = 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n!}} < 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}} = 6^{\frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}} = 6^{1 - \frac{1}{2^n}} < 6$.

10. $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{6}} = 2^{\frac{5}{12}} = 2^a \Rightarrow a = \frac{5}{12}$.

11. $\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt[4]{2} + 1\right)\left(\sqrt[8]{2} + 1\right)\left(\sqrt[16]{2} + 1\right)\left(\sqrt[16]{2} - 1\right) = \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt[4]{2} + 1\right)\left(\sqrt[8]{2} + 1\right)\left(\sqrt[8]{2} - 1\right) = \ldots = 1$, de unde cerinţa.

12. $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{100} - \sqrt{99}\right) = 9$

13. $\sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} - \sqrt{5} = \sqrt{3 - \sqrt{\left(2\sqrt{5} - 3\right)^2}} - \sqrt{5} = \sqrt{3 - \left(2\sqrt{5} - 3\right)} - \sqrt{5} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} - \sqrt{5} = -1$

14. $27 = 5 - x + 3 + x + 3\sqrt[3]{5 - x} \cdot \sqrt[3]{3 + x}\left(\sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{3 + x}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{5 - x} \cdot \sqrt[3]{3 + x} = \frac{19}{9}$.

15. $\sqrt{101} = 10{,}049\ldots \Rightarrow a_2 = 4$. **16.** *a)* Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Ecuaţia devine $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1$, deci soluţia finală este $x = 2$. *b)* Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$. Ecuaţia devine $x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 8$, deci soluţia finală este $x = 8$. *c)* Notăm $\sqrt{x} = a \geq 0$, deci $a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x = 4$. *d)* Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases}$. Ecuaţia devine $3x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{3}$, deci soluţia finală este $x = 0$.

17. a) Condiţii de existenţă $x \geq -1$. Prin ridicare la pătrat avem $x = 0$.

b) Condiţii de existenţă $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. Avem $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ soluţie.

c) Condiţii de existenţă $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$. $x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=2$.

d) Condiţii de existenţă $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \end{cases}$. $x^2-11x+24=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=8$, în final $x=3$ singura soluţie.

e) Condiţii de existenţă $x \geq 0$. $\sqrt{x}-1=\pm 2 \Rightarrow x=9$ singura soluţie.

18. a) Condiţiile de existenţă sunt $x+4>0,\ x-4>0$. Dacă notăm $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}=a>0$ obţinem $a+\frac{2}{a}=\frac{11}{3} \Rightarrow a_1=3,\ a_2=\frac{2}{3} \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{52}{5}$, soluţia finală este $x=5$.

b) Condiţiile de existenţă sunt $\frac{x+4}{x-4}>0$. Dacă notăm $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=a>0$ obţinem $a+\frac{2}{a}=\frac{11}{3} \Rightarrow a_1=3,\ a_2=\frac{2}{3} \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{52}{5}$ ambele soluţii sunt bune.

19. a) Condiţii $(x+2)(x+3) \geq 0$, iar ecuaţia devine $x^2+5x-6=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-6$, ambele soluţii sunt bune.

b) Condiţii $x+2 \geq 0,\ x+3 \geq 0$, iar ecuaţia devine $x^2+5x-6=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-6$ singura soluţie fiind $x=1$

20. a) Condiţii $x>0,\ x \neq -1$. Notăm $\frac{\sqrt{x}}{x+1}=a$ şi obţinem $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2} \Rightarrow a_1=2,\ a_2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=1$

b) Notăm $x^2+x-1=a \geq 0$ şi ecuaţia se scrie $\sqrt{a}+\sqrt{a+3}=3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$.

c) Condiţia de existenţă este $x>0$. Notăm $\frac{x}{2+\sqrt{x}}=a>0 \Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3} \Rightarrow a_1=3,\ a_2=\frac{1}{3}$. Pentru $a=3 \Rightarrow\ x=\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^2$, iar pentru $a=\frac{1}{3} \Rightarrow x=1$.

21. a) $x=7$.

b) $\sqrt[3]{x-1}=a \Rightarrow a^3+a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x=1$.

c) Ecuaţia se scrie $1-x=(x+1)^3 \Rightarrow x^3+3x^2+4x=0 \Rightarrow x=0$.

d) Ecuaţia se scrie $x+1=(1-2x)^3 \Rightarrow 8x^3-12x^2+7x=0 \Rightarrow x=0$.

22. a) Condiţiile sunt $x \geq 1,\ x+8 \geq 6\sqrt{x-1}$. Ecuaţia se scrie $\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2=1 \Rightarrow x_1=17,\ x_2=5$.

b) Notăm

$\sqrt{x-1}=t \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(2t-1)^2}=3 \Rightarrow |t-3|+|2t-1|=3 \Rightarrow t_1=1,\ t_2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1=2,\ x_2=\frac{10}{9}$.

23. a) $f(x)=\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}-2\right|=\begin{cases} 2\sqrt{x-1}-3,\ x \in (5,+\infty) \\ 1,\ x \in [2,5] \\ 3-2\sqrt{x-1},\ x \in [1,2) \end{cases}$.

Deci $f(x)=1 \Leftrightarrow x \in [2,5]$.

b) $\operatorname{Im} f=[1,+\infty) \Rightarrow m \in [1,+\infty)$.

24. a) $f(x)=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}+2\right|=2\sqrt{x-1}+3$.

Deci $f(x)=3 \Leftrightarrow x=1$.

b) $\operatorname{Im} f=[3,+\infty)$ şi cum f este strict crescătoare rezultă că ecuaţia $f(x)=m$ admite o singură soluţie reală, pentru orice $m \in [3,+\infty)$.

25. a) Funcţia $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ este strict crescătoare, deci ecuaţia $f(x)=2$ are soluţia unică $x=1$.

Analog se rezolvă şi celelalte ecuaţii: b) $x=3$, c) $x=1$, d) $x=1$, e) $x=8$.

26. Ecuaţia se scrie $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y+2}-2\right)^2=0 \Rightarrow x=2,\ y=2$ cu soluţia $(2,2)$.

27. a) Condiţii $x+2 \geq 0,\ x \geq 0$.

Inecuaţie devine $x^2-x-2>0 \Rightarrow x \in \left((-\infty,-1) \cup (2,+\infty)\right) \cap [0,+\infty)=(2,+\infty)$

b) Condiţii $x+2 \geq 0$.

Pentru $x<0$ inecuaţia este satisfăcută. Pentru $x \geq 0$ inecuaţia devine $x^2-x-2 \leq 0 \Rightarrow x \in [0,2]$.

Finalizare $x \in [-2,2]$.

c) Inecuaţia se scrie $2-x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in [-1,1]$.

Tema 1.6 Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică. Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

1. $a=16,\ b=3$. **2.** $a=0,\ b=2,\ c=27$. **3.** *a)* 1; *b)* 2; *c)* $\frac{2}{3}$; *d)* 0; *e)* 5; *f)* $\frac{9}{16}$.

4. *a)* $4<5<8 \Rightarrow 2<\log_2 5<3$; *b)* $8<9 \Rightarrow 3<\log_2 9$; $125<128 \Rightarrow 3=\log_5 125<\log_5 128=7\log_5 2$.

5. *a)* $\log_{12} 18=\frac{\log_3 18}{\log_3 12}=\frac{\log_3 2+\log_3 9}{\log_3 4+\log_3 3}=\frac{a+2}{2a+1}$; *b)* $\log_5 20=\frac{1}{1-2a}$; *c)* $\log_{15} 45=\frac{a+2}{a+1}$;

d) $\log_6 60=\frac{\log_2 60}{\log_2 6}=\frac{\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5}{\log_2 2+\log_2 3}=\frac{a+2+ab}{1+a}$, deoarece $\log_2 5=\log_2 3 \cdot \log_3 5=ab$.

6. *a)* $A=\log_a x^{1+2+\ldots+n}=\frac{n(n+1)}{2}\log_a x$; *b)* $B=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\cdot \ln x=\frac{n\ln x}{n+1}$;

c) $C=\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{998}{999}\cdot\frac{999}{1000}\right)=\lg\frac{1}{1000}=-3$; *d)* $D=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\lg^2 2}-\frac{n}{n+1}\log_2^2 2=0$;

e) $E=\log_{10!} 2+\log_{10!} 3+\ldots+\log_{10!} 10=\log_{10!} 10!=1$.

7. Dacă $p \in \mathbb{N}$, atunci $[\lg k]=p \Leftrightarrow p \leq \lg k<p+1 \Leftrightarrow 10^k \leq p \leq 10^{p+1}-1$. Suma din enunţ este egală cu $2008+9\cdot\sum_{p=0}^{2007} p\cdot 10^p=\frac{10}{9}\left(2007\cdot 10^{2008}-2008\cdot 10^{2007}+1\right)+2008$.

8. *a)* $\lg\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\lg a+\lg b}{2} \Leftrightarrow ab=\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=7ab$; *b), c)* – se procedează analog;

d) $\lg\left(\frac{a+3b}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\lg a+\lg b}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a+3b}{2\sqrt{3}}\right)^2=ab \Leftrightarrow a^2+6ab+9b^2=12ab \Leftrightarrow (a-3b)^2=0 \Leftrightarrow a=3b$.

9. Se impun condiţiile de existenţă; obţinem: *a)* $(2,\infty)$; *b)* $(1,\infty)$; *c)* $(-1,1)$; *d)* $(-2,2)\setminus\{1\}$; *e)* $(-\infty,3)\cup(4,\infty)$; *f)* $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. **10.** *a)* Avem $f(x)=x(1+\log_3 2)$, deci f este funcţie de gradul I strict crescătoare, deci injectivă; *b)* Analog, $f(x)=x(1-\log_3 2)$, este funcţie strict descrescătoare.

12. Se înmulţeşte relaţia $\log_a x+\log_c x=2\log_b x$ cu $\log_x a$ şi se foloseşte a doua formulă de la

probabilitatea cerută este $\frac{10}{5^3}=\frac{2}{25}$. **27.** Trei dintre numerele $f(0), f(1), f(2), f(3)$ sunt egale cu 0, iar al patrulea cu 1. Sunt 4 cazuri favorabile, deci probabilitatea este $\frac{4}{4^4}=\frac{1}{64}$. **28.** Sunt doar două funcții nesurjective – cele constante; deci sunt $2^5-2=30$ de funcții surjective; $p=\frac{30}{32}$.

29. *a)* 9^5; *b)* $4\times4\times9^3=16\cdot729$; *c)* $A_6^5=6!=720$. **30.** *a)* $C_8^3=56$; *b)* $C_n^2=45; n=10$; *c)* $C_n^3=35; n=7$; *d)* $C_5^2\cdot C_5^3=100$. **31.** *a)* $A_4^3=28$; *b)* $A_5^4=120$; *c)* $5^4=625$. **32.** *a)* 64; *b)* 9; *c)* 16; *d)* 125; *e)* 32; *f)* $2\cdot C_5^3=20$. **33.** *a)* $\frac{6}{90}$; *b)* $\frac{243}{900}$; *c)* $\frac{4}{90}$; *d)* $\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$; *e)* $\frac{36}{40}$; *f)* $\frac{12}{30}$; *g)* $\frac{2^3-1}{2^6-1}=\frac{7}{63}$. **34.** $\frac{1}{10}$. **35.** $\frac{27}{36}$.

Tema 1.9 Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică

1. În triunghiul ABP dreptele BC, PM sunt mediane și N este centrul de greutate al triunghiului, deci M, N, P sunt coliniare. **2.** Fie O centrul paralelogramului. În triunghiul ABD dreptele AO și DE sunt mediane, iar F se află pe mediana din D la $\frac{1}{3}$ de punctul E, adică este centrul de greutate al ΔABD. Deci $F\in AO=AC$. **3.** $\frac{MA}{AN}=\frac{1}{2}\Rightarrow \overrightarrow{PA}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{PM}+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{PN}\Rightarrow a=\frac{2}{3}$ și $b=\frac{1}{3}$.

4. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$ și $b=-1$.

5. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=3\overrightarrow{BC}\Rightarrow|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=12$. **6.** Din teorema bisectoarei avem $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\Rightarrow a=\frac{4}{7}, b=\frac{3}{7}$. **7.** $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$. **8.** Fie O centrul paralelogramului. $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})$, de unde cerința. **9.** Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $\vec{0}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, deci $M=G$. **10.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ și adunând aceste relații obținem $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$. **11.** Fie G este centrul de greutate al triunghiului ABC și G' este centrul de greutate al triunghiului MNP. $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP})=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}\right)+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}\right)+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GA}\right)\right]=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$, deci $G=G'$. **12.** Fie G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $\vec{0}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}$, deci $H=G$ de unde rezultă că triunghiul ABC este echilateral. **13.** Fie E piciorul bisectoarei din A. Din teorema bisectoarei avem $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{b}{c}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{b+c}\overrightarrow{AD}$, de unde rezultă cerința.

14. $AB=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, $AC=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$, $BC=AC-AB=\ldots$ $=\sqrt{81+225}=\sqrt{306}$, deci perimetrul triunghiului ABC este egal cu $18+\sqrt{306}$. **15.** *a)* Vectorul $\vec{v}$ căutat este de forma $\vec{v}=a(4\vec{i}+3\vec{j})$, $a\in\mathbb{R}$ și cum $|\vec{v}|=|a||4\vec{i}+3\vec{j}|=5|a|=6\Rightarrow a=\pm\frac{6}{5}\vec{u}$. *b)* Vectorul $\vec{v}$ căutat este de forma $\vec{v}=a(-3\vec{i}+4\vec{j})$, $a\in\mathbb{R}$ și cum $|\vec{v}|=|a||-3\vec{i}+4\vec{j}|=5|a|=5\Rightarrow a=\pm(-3\vec{i}+4\vec{j})$.

16. $m_{\vec{u}}=-\frac{3}{a}=-1\Rightarrow a=3$. **17.** *a)* Fie D mijlocul laturii BC. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{5}{2}\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

b) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}(-7\vec{i}-4\vec{j})$. **18.** $AB=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$, $AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$ Fie D piciorul bisectoarei din A. Din teorema bisectoarei avem $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{5}{13}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+\frac{5}{13}}\overrightarrow{AB}+\frac{\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{18}(-27\vec{i}+99\vec{j})\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{18}\sqrt{27^2+99^2}$.

19. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=10$. **20.** Fie $Q(x,y)$. $\overrightarrow{MN}(-4,1)=\overrightarrow{QP}(-1-x,2-y)\Rightarrow x=3$, $y=1\Rightarrow Q(3,1)$. **21.** $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Rightarrow\sqrt{4+9}=\sqrt{(a-1)^2+1}\Rightarrow a=1\pm2\sqrt{3}$ **22.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=m(m-2)-3=0\Rightarrow m=3$. **23.** $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1\cdot3+2\cdot(-1)}{\sqrt{1+4}\sqrt{9+1}}=\frac{1}{\sqrt{50}}$. **24.** $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1\cdot a+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+1}\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a>1\\2(a-1)^2=a^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>1\\a=2\pm\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow a=2+\sqrt{3}$ **25.** Fie $\overrightarrow{AD}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Avem condițiile $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BD}\parallel\overrightarrow{BC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{2}\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{22}{5}, y=\frac{11}{5}\Rightarrow\overrightarrow{AD}\left(-\frac{22}{5},\frac{11}{5}\right)$. **26.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=5\cdot2+(-4)\cdot3<0\Rightarrow$ cerința.

27. $AB=AC=5\Rightarrow\Delta ABC$ este isoscel. Fie D proiecția lui A pe BC. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=3\vec{j}\Rightarrow AD=3$.

28. $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2=AD^2+AB^2+2AD\cdot AB\cdot\cos A=36+16+24=76\Rightarrow|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}|=\sqrt{76}$.

29. $\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\Rightarrow\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{7}{\sqrt{50}}$. $S_{ABC}=\frac{BA\cdot BC\cdot\sin B}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}}{2}=\frac{7}{2}$.

30. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\left[(2\vec{i}-3\vec{j})+(-2\vec{i}-3\vec{j})\right]=-\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{AG}(0,-2)$. **31.** *a)* $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=4\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$. *b)* $|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}=13\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{13}$. *c)* $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}+\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|}=\frac{\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}}{4\cdot\sqrt{13}}=\frac{5}{2\sqrt{13}}$. **32.** $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\frac{5\pi}{6}$. **33.** Mijlocul segmentului AB este $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, panta dreptei AB este $m_{AB}=1$. Dacă d este mediatoarea segmentului AB, atun

$d:y-\frac{1}{2}=-1\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow d:x+y=0$. **34.** *a)* Fie d dreapta căutată. $m_d=m_{AB}=-1\Rightarrow d:y=-x$. *b)* Fie $C(x,0)\Rightarrow m_{AC}\cdot m_{AB}=\frac{-1}{x-1}\cdot(-1)=-1\Rightarrow x=0\Rightarrow C(0,0)$.

35. M este mijlocul segmentelor AC şi BD, deci $1=\frac{1+x_C}{2}$, $-1=\frac{3+y_C}{2}\Rightarrow C(1,-5)$ şi $1=\frac{2+x_D}{2}$, $-1=\frac{-1+y_D}{2}\Rightarrow D(0,-1)$. **36.** Fie $M(x,y)\Rightarrow \overline{AM}(x+1,y+5)=\frac{2}{5}\overline{AB}(3,6)\Rightarrow M\left(\frac{1}{5},-\frac{13}{5}\right)$. **37.** $\sqrt{(u-6)^2+v^2}=\sqrt{u^2+(v-6)^2}=\sqrt{(u-12)^2+(v-12)^2}\Rightarrow u=7,v=7$, deci $M(7,7)$. **38.** $d:y-5=m(x-2)$, unde panta dreptei d este $m=-\frac{1}{2}$, deci $d:x+2y-12=0$. **39.** $d:y-2=m(x-1)$, unde panta dreptei d este $m=-1$, deci $d:x+y-3=0$. **40.** Fie D mijlocul segmentului $[BC]$, deci $D(2,1)$. Mediana din A are ecuaţia $y-y_A=m_{AM}(x-x_A)\Rightarrow AD:4x-y-7=0$. **41.** $\overline{AB}(-4,2)\parallel\overline{CD}(3,a+3)\Rightarrow\frac{-4}{3}=\frac{2}{a+3}\Rightarrow a=-\frac{9}{2}$. **42.** $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\Rightarrow C(2,-2)$. **43.** $BC:x+y-1=0$, deci $d(A,BC)=\frac{|x_A+y_A-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. **44.** $m_1=m_2\Rightarrow -a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$ **45.** Fie d' dreapta căutată. $m_d\cdot m_{d'}=-1\Rightarrow m_{d'}=2\Rightarrow d':y-2=2(x-3)$. **46.** Fie d dreapta căutată. $m_{AB}\cdot m_d=-1\Rightarrow m_d=-3\Rightarrow d:y-2=-3(x-1)$. **47.** Punctul $C(-1,2)$ este mijlocul segmentului $[AB]$, panta dreptei AB este egală cu -1. Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuaţia $d:x-y+3=0$, deci $d(M,d)=\frac{|1-5+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **48.** $m_{AB}=\frac{3}{4}\Rightarrow m_{h_C}=-\frac{4}{3}\Rightarrow h_C:y+3=-\frac{4}{3}(x-2)$. **49.** Punctul $A(-2011,0)\in d_1$ şi cum dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele, rezultă că $d(d_1,d_2)=d(A,d_2)=\frac{|-2011+a|}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow a=2011\pm2\sqrt{2}$. **50.** Avem trei cazuri: $d(d_1,d_2)=d(d_1,d_3)$, $d(d_2,d_1)=d(d_2,d_3)$ sau $d(d_3,d_1)=d(d_3,d_2)$. Fie $A(-2,1)\in d_1$ şi $B(-4,3)\in d_2$. Cazul 1. $d(A,d_2)=d(A,d_3)\Rightarrow\frac{|-6+4|}{5}=\frac{|-6+4+a|}{5}\Rightarrow a_1=4,\ a_2=0$, dar $a=0$ nu convine. Cazul 2. $d(B,d_1)=d(B,d_3)\Rightarrow\frac{|-12+12+2|}{5}=\frac{|-12+12+a|}{5}\Rightarrow a_1=2,\ a_2=-4$, dar $a=2$ nu convine. Cazul 3. $d(A,d_3)=d(B,d_3)\Rightarrow\frac{|-6+4+a|}{5}=\frac{|-12+12+a|}{5}\Rightarrow a=1$. **51.** $\{A(-4,0)\}=d_2\cap Ox$ şi $\{B(0,-2)\}=d_2\cap Oy$, deci $d_1=AB':x-2y+4=0$, unde $B'(0,2)=sim_{Ox}B$. **52.** $\begin{cases}1+2a+b=0\\-1+a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=-2,b=3\Rightarrow a+b=1$. **53.** $\frac{m}{3}=\frac{m-2}{-1}\Rightarrow m=\frac{3}{2}$. **54.** $\frac{2}{1}=\frac{1}{a}=\frac{-b}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$, $b=-4\Rightarrow a+b=-\frac{7}{2}$. **55.** a) $AB:2x+y-1=0$ de unde cerinţa. b) Aria triunghiului ABC este egală cu $|2a+b-1|$, de unde cerinţa.

Tema 1.10 Trigonometrie. Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar în geometria plană

1. *a)* $S=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\ldots+\sin^2 44^0+\frac{1}{2}+\cos^2 44^0+\ldots+\cos^2 1^0+0=44{,}5$. *b)* $P=\sin1^0\cdot\sin2^0\cdot\ldots\cdot\sin2011^0=0$, pentru că $\sin180^0=0$ **2.** *a)* $S=\sin1^0+\sin2^0+\ldots+\sin180^0+(-\sin1^0)+(-\sin2^0)+\ldots+(-\sin180^0)=0$. *b)* $P=\cos1^0\cdot\cos2^0\cdot\ldots\cdot\cos2011^0=0$, pentru că $\cos90^0=0$. **3.** *a)* $tg1^0\cdot tg2^0\cdot\ldots\cdot tg89^0=tg1^0\cdot tg2^0\cdot\ldots\cdot tg44^0\cdot tg45^0\cdot ctg44^0\cdot ctg43^0\cdot\ldots\cdot ctg1^0=1$.
b) $\cos1^0+\cos2^0+\ldots+\cos179^0=\cos1^0+\cos2^0+\ldots+\cos89^0+\cos90^0-\cos89^0-\cos88^0-\ldots-\cos1^0=0$
4. $\frac{1}{\sin10^0}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10^0}=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos10^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^0=2\sin10^0\cos10^0\Leftrightarrow$ $\sin(30^0+10^0)=\sin40^0$ egalitate adevărată. **5.** *a)* $\frac{\sin a+\cos a}{\sin a}=1+\frac{1}{tga}=\frac{3}{2}$. *b)* $\frac{2\sin^2a+1}{\cos^2a}=\frac{3\sin^2+\cos^2a}{\cos^2a}=1+3tg^2a=13$ **6.** $a=tg(78^0-18^0)=\sqrt{3}$, $b=\sin(108^0-48^0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** $\sin40^0\cdot\sin140^0=\sin^2 40=\cos^2 50^0=(-\cos130^0)^2=\cos^2130^0$. **8.** *a)* $\sin75^0\cos15^0=\frac{1}{2}(\sin90^0+\sin60^0)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. *b)* $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{23\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{4}$. *c)* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **9.** $\sin1>\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}>\sin3$. $\sin2-\sin1=2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}>0$, pentru că $\frac{1}{2},\frac{3}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Finalizare numărul căutat este egal cu $\sin2$. **10.** $1\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin1>\cos1$.

11. *a)* $\cos^2a=1-\sin^2a=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos a=-\frac{4}{5}\Rightarrow\sin2a=2\sin a\cos a=-\frac{24}{25}$. *b)* $tga=\frac{\sin a}{\cos a}=-\frac{3}{4}$.

12. $\cos^2x=1-\sin^2x=\frac{1}{9}\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{3}$. **13.** $tgx+ctgx=2\Rightarrow\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=2\Rightarrow$ $1=2\sin x\cos x\Rightarrow\sin2x=1$. **14.** Doar numerele 0 şi $\frac{\pi}{2}$ din mulţimea A verifică ecuaţia, deci probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$ **15.** $\frac{\sin x-\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\sin x-\cos x}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x}=-\sqrt{2}$. **16.** Prin ridicare la pătrat obţinem $\sin^2a+\cos^2a+2\sin a\cos a=\frac{1}{9}\Rightarrow\sin2a=-\frac{8}{9}$. **17.** Ridicăm la pătrat fiecare egalitate şi le adunăm, deci $\sin^2a+\cos^2b+2\sin a\cos b+\cos^2a+\sin^2b+2\cos a\sin b=\frac{5}{4}\Rightarrow$ $2\sin(a+b)=\frac{-3}{4}\Rightarrow\sin(a+b)=-\frac{3}{8}$. **18.** $1=tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb}\Rightarrow tgb-tga+tgb\cdot tga=-1$.

19. $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. **20.** $\sin2x=\frac{1}{2}(\sin x+\sin3x)=\sin2x\cos x\Rightarrow\sin2x=0$ sau $\cos x=1$

$\Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$. **21.** Din formula lui Heron $S_{ABC} = 12 = 9r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$. **22.** *a)* $S_{ABC} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sin\frac{2\pi}{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

b) $BC^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76 \Rightarrow P_{ABC} = 10 + \sqrt{76}$. *c)* $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{76}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{76}{3}}$.

23. $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Leftrightarrow \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza c. **24.** $\cos^2 A + \cos^2 B = 2\cos^2 C \Rightarrow (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) = 2(1 - \sin^2 C) \Rightarrow$ $\sin^2 A + \sin^2 B = 2\sin^2 C \Leftrightarrow \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = 2\frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$.

25. $\cos C = \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = -\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. **26.** $BC = 2R\sin A = 6$.

27. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{3}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$. **28.** *a)* $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c \cdot b \cdot \cos A = 8$. *b)* $\sin A = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{3}{2\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$.

29. $a + c = 2b \Rightarrow 2R\sin A + 2R\sin C = 4R\sin B \Rightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B$. **30.** $a^2 \sin 2B = \frac{abc}{R} \Rightarrow$ $2a^2 \sin B\cos B = 4\frac{ac\sin B}{2} \Rightarrow a\cos B = c \Rightarrow \cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic. **31.** Fie O centrul dreptunghiului. $AC = 10 \Rightarrow AO = 5$. $S_{ABCD} = 48 \Rightarrow S_{AOB} = 12 = \frac{BO \cdot AO \cdot \sin O}{2} = \frac{25 \cdot \sin O}{2} \Rightarrow \sin O = \frac{24}{25}$. **32.** $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{76}$. Aria $S_{ADC} = \frac{AD \cdot DC \cdot \sin D}{2} =$ $6\sqrt{3} = \frac{AC \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{76}}$ **33.** Aria $S_{ABC} = 6\sqrt{6} = \frac{7 \cdot h_{\min}}{2} \Rightarrow h_{\min} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$. **34.** Fie a cea mai mică catetă, deci laturile triunghiului sunt a, $a+1$ şi $a+2$. $(a+2)^2 = a^2 + (a+1)^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$. Deci triunghiul are laturile 3,4 şi 5. **35.** Prin ridicare la pătrat avem $1 + 2\sin B\cos B = 1 + 2\sin C\cos C \Rightarrow \sin 2B = \sin 2C \Rightarrow$ $2\sin\frac{2B - 2C}{2}\cos\frac{2B + 2C}{2} = 0 \Rightarrow B = C$ sau $B + C = \frac{\pi}{2}$. Dar triunghiul ABC este ascuţitunghic rezultă că $B = C$. **36.** $\mathrm{tg}C = \mathrm{tg}(\pi - \mathrm{A} - \mathrm{B}) = -\frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B} = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$. **37.** Triunghiul este dreptunghic cu aria $S = 6 = p \cdot r \Rightarrow r = 1$, iar $R = \frac{5}{2}$. **38.** Fie A unghiul obtuz. $\cos A = \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} <$ $< 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow a \in (-1,3) \cap \mathbb{Z} = \{0,1,2\}$. Singura soluţie este $a = 2$. **39.** *a)* $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; *b)* $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$; *c)* $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$; *d)* $\frac{\pi}{3} + \mathrm{arcctg}\left(\sqrt{2}\right) + \pi - \mathrm{arcctg}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{4\pi}{3}$; *e)* $\frac{\pi}{3} - \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$. **40.** *a)*

$\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\frac{3}{5}\sqrt{1 - \frac{9}{25}}$;

b) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}$; *c)* $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; *d)* $-\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$; e) $\mathrm{tg}(2\mathrm{arctg}\ 3) = \frac{2\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\ 3)}{1 - \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\ 3)} = \frac{6}{-8}$. **41.** *a)* $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$; *b)* $x \in \left\{\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; *c)* Dacă notăm $a = \sin x$ şi $b = \cos x$ obţinem sistemul $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ cu soluţiile $(1,0)$ şi $(0,1)$, deci $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$; *d)* $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; *e)* $2\sin x\cos x = \cos x \Rightarrow$ $\cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$;

f) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$; *g)* $2x \in \left\{-2\pi + \frac{5\pi}{4}, -2\pi + \frac{7\pi}{4}\right\} \subset [-2\pi, 0] \Rightarrow$ $x \in \left\{-\pi + \frac{5\pi}{8}, -\pi + \frac{7\pi}{8}\right\}$. **42.** *a)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, deci mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$. *b)* $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *c)* $\mathrm{tg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. *d)* Dacă notăm $a = \sin x \in [-1,1]$, obţinem ecuaţia $a = 2 - a^2 \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -2$, în final $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, deci $x = \frac{1}{2}$.

Tema 2.1 Permutări. Matrice. Determinanţi

1. *a)* $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&4&1\end{pmatrix}$, $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&2&5\end{pmatrix}$; *b)* $\sigma^6=e$. **2.** *a)* (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4); $\varepsilon(\sigma)=1$. *b)* $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&3&2&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$. **3.** *a)* $k=4$. *b)* $4\mid 2012\Rightarrow\sigma^{2012}=e$.

c) $x=\sigma^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&2&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$.

4. *a)* $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&4&2&3&5\end{pmatrix}$. *b)* $m(\sigma)=m(\sigma^{-1})=7$. *c)* x^4 este pară, $\forall x\in S_6$, σ e impară $\Rightarrow x^4\neq\sigma$, $\forall x\in S_6$. **5.** *a)* $x=a^{-1}b$. *b)* $ab=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\Rightarrow k=5$. *c)* Cel mai mic număr $p\in\mathbb{N}^*$ cu $b^p=e$ este 6. Dacă $k=6c+r, 0\le r\le 5$, atunci $\sigma^k=\sigma^{6c}\cdot\sigma^r=\sigma^r$. Ca urmare, $\sigma^k=e\Leftrightarrow\sigma^r=e\Leftrightarrow r=0\Leftrightarrow k=6c\Leftrightarrow 6\mid k$. **6.** *a)* Da. *b)* Prin calcul, $a^4=b^4=e$. *c)* $xb^3=a^3x\Leftrightarrow axb^3=a^4x\Leftrightarrow axb^3=x\Leftrightarrow axb^4=xb\Leftrightarrow ax=xb$. O soluţie este *c*. **7.** *a)* $m(\sigma)=4$. *b)* $|A|=5$. *c)* σ este pară $\Rightarrow\sigma^n$ e pară, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **8.** *a), b)* Calcul direct. **9.** $AB=\begin{pmatrix}a+3&b+12\\a+4&b+16\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}a+b&3a+4b\\5&19\end{pmatrix}$. Rezultă $a=1$, $b=3\Rightarrow A=B$. **10.** $AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, deci $AB=(BA)^t$. **11.** $X^2=-I_2, X^3=-X$, $X^4=I_2\Rightarrow X+X^2+X^3+X^4=O_2$ $\Rightarrow X+X^2+...+X^{100}=O_2$. **12.** $X^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$, deci $X+X^2+...+X^{10}=\begin{pmatrix}10&55\\0&10\end{pmatrix}$. **13.** $AB=\begin{pmatrix}2+5a&10\\a&2\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2&10\\a&5a+2\end{pmatrix}$, deci $a=0$. **14.** *a)* $A^3=O_3$. *b)* $(I_3-A)(I_3+A+A^2)=I_3-A^3=I_3-O_3=I_3$. **15.** *a)* Se obţine $AB=(6)$ şi $BA=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$. *b)* $(BA)^n=B\underbrace{(AB)(AB)...(AB)}_{n-1}A=6^{n-1}BA$. **16.** Fie $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$.

a) $\text{tr}(\alpha A)=\sum_{i=1}^{n}\alpha a_{ii}=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\alpha\text{tr}(A)$. *b)* $\text{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\text{tr}(A)+\text{tr}(B)$.

17. Calcul direct. **18.** Inducţie. $P(2)$: $A^2=\text{tr}(A)A$, adevărat din exerciţiul anterior; $P(n)\Rightarrow P(n+1)$: $A^{n+1}=A^n\cdot A=(\text{tr}(A))^{n-1}A^2=(\text{tr}(A))^nA$. **19.** $\det(A^{2012})=0\Rightarrow\det(A)^{2012}=0\Rightarrow\det(A)=0\Rightarrow A^{2012}=\text{tr}(A)^{2011}A\Rightarrow\text{tr}(A)^{2012}=0\Rightarrow\text{tr}(A)=0\Rightarrow A^2=\text{tr}(A)A=O_2$. **20.** Inducţie după *n*.

21. $A=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&\sin\frac{\pi}{3}\\-\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow A^n=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3}&\sin\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}&\cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow A^{2013}=-2^{2013}I_2$.

22. Fie $B=A-I_2=\begin{pmatrix}4&-8\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow B^2=2B\Rightarrow B^k=2^{k-1}\cdot B$. Apoi, $A=I_2+B\Rightarrow A^n=(I_2+B)^n=$ $I_2+\sum_{k=1}^{n}C_n^kB^k=I_2+\sum_{k=1}^{n}C_n^k2^{k-1}B=I_2+\frac{1}{2}B\sum_{k=1}^{n}C_n^k2^k=I_2+\frac{1}{2}B[(1+2)^n-1]=I_2+B\cdot\frac{3^n-1}{2}$.

23. $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $M^3=O_3\Rightarrow M^n=O_3, n\ge 3$. **24.** $A=I_3+M$, unde este matricea de la exerciţiul anterior. Rezultă că $A^n=(I_3+M)^n=I_3+C_n^1M+C_n^2M^2=\begin{pmatrix}1&-n&n(n+3)/2\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

25. Fie *X* o soluţie. Rezultă $\det(X^2)=49\Rightarrow\det(X)^2=49\Rightarrow\det(X)=\pm7$. Distingem cazurile

i) $\det(X)=7\Rightarrow X^2-\text{tr}(X)X+7I_2=O_2\Rightarrow\begin{pmatrix}1&12\\-4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}=$

$\text{tr}(X)\cdot X\Rightarrow\text{tr}(X)\cdot X=\begin{pmatrix}8&12\\-4&8\end{pmatrix}\Rightarrow\text{tr}(\text{tr}(X)X)=16\Rightarrow\text{tr}^2(X)=16\Rightarrow\text{tr}(X)=\pm4\Rightarrow$

$\Rightarrow\pm4X=\begin{pmatrix}8&12\\-4&8\end{pmatrix}\Rightarrow X_{1,2}=\pm\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}$.

ii) $\det(X)=-7\Rightarrow\begin{pmatrix}1&12\\-4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}=\text{tr}(X)\cdot X\Rightarrow\text{tr}(X)\cdot X=\begin{pmatrix}-6&12\\-4&-6\end{pmatrix}\Rightarrow\text{tr}^2(X)=-12$.

Cum $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nu avem soluţii.

26. Fie *X* o soluţie $\Rightarrow X\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=X^3=X^2X=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}X$. Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Din egalitatea anterioară rezultă $a=d$, $b=c\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\Rightarrow X^3=\begin{pmatrix}\frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2}&\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{3}\\\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{3}&\frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\Rightarrow(a+b)^3+(a-b)^3=2$ şi $(a+b)^3-(a-b)^3=4\Rightarrow(a+b)^3=3$ şi $(a-b)^3=-1\Rightarrow a+b=\sqrt[3]{3}$, $a-b=-1\Rightarrow a=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$, $b=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$. **27.** Fie *X* o soluţie $\Rightarrow\det(X^3)=0\Rightarrow\det(X)^3=0\Rightarrow\det(X)=0\Rightarrow X^3=\text{tr}^2(X)X\Rightarrow\text{tr}^2(X)X=\begin{pmatrix}4&6\\-2&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\text{tr}(\text{tr}^2(X)X)=1\Rightarrow\text{tr}^3(X)=1\Rightarrow\text{tr}(X)=1\Rightarrow X=\begin{pmatrix}4&6\\-2&-3\end{pmatrix}$. **28.** *a)* $A^2=3A\Rightarrow a=3$. *b)* $A-A^t=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. $(A-A^t)^2=-I_2\Rightarrow(A-A^t)^{2008}=I_2$. **29.** Din teorema lui Cayley avem $A^2-5A-2I_2=O_2\Rightarrow A^2-5A-I_2=I_2$. Determinantul este egal cu 1. **30.** *a)* Da. *b)* Vom demonstra prin inducţie. Cazul $n=1$ este evident. Cum $A^2-3A+2I_2=O_2$ şi $B^2-3B+2I_2=O_2$, prin scădere obţinem $A^2-B^2==3(A-B)=(2^2-1)(A-B)$, deci cazul $n=2$ este adevărat. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n-1$ şi *n*. Din $A^{n+1}-3A^n+2A^{n-1}=O_2$ şi $B^{n+1}-3B^n+2B^{n-1}=O_2$, rezultă succesiv $A^{n+1}-B^{n+1}=3(A^n-B^n)-2(A^{n-1}-B^{n-1})=$

$(3(2^n-1)-2(2^{n-1}-1))(A-B)=(2^{n+1}-1)(A-B)$. **31.** ***a)*** Deoarece

$AA'=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}\Rightarrow\det(AA')=81$. ***b)*** Calcul direct. **32.** ***a)*** $\det(A'A)=\det A'\det A=(\det A)^2\geq 0$. ***b)*** Prin calcul obținem $A\cdot A'=A'\cdot A\Rightarrow ac+bd=ab+cd$, de unde $\Leftrightarrow(a-d)(b-c)=0$ **33.** ***a)*** $\det(A)=-4$. ***b)*** $A^2=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ și $A^2-A=2I_3$. **34.** ***a)*** $\det(A)=2$. ***b)*** $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ și $A^2-A=2I_3$. **35.** ***a)*** Calcul direct. ***b)*** Folosind binomul lui Newton rezultă $(A+B)^n=A^n+B^n$. **36.** ***a)*** $A^4=-4I_2$. ***b)*** Fie $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Din $BE_1=E_1B$ și $BE_2=E_2B$ rezultă $b=c=0$ și $d=a$, deci $B=aI_2$. **37.** ***a)*** Se arată prin calcul direct. ***b)*** Se demonstrează prin inducție. ***c)*** $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow A^{2008}=\begin{pmatrix}\cos 1004\pi&-\sin 1004\pi\\\sin 1004\pi&\cos 1004\pi\end{pmatrix}=I_2$. **38.**

$\Delta_{22}=\begin{vmatrix}-1&4\\-4&0\end{vmatrix}=16$. **39.** $i\left((1+i)^2-(1-i)^2\right)=4i^2=-4$. **40.** $\begin{vmatrix}-1&3&5\\0&-2&4\\1&1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&2\\-1&3&5\\1&1&-3\end{vmatrix}=-18$. **41.**

$\begin{vmatrix}x-3&x&x\\x&x-3&x\\x&x&x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-3&x&x\\x&x-3&x\\3x-3&3x-3&3x-3\end{vmatrix}=(3x-3)\begin{vmatrix}x-3&x&x\\x&x-3&x\\1&1&1\end{vmatrix}=3(x-1)\begin{vmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\1&1&1\end{vmatrix}=$ $=27(x-1)$. Rezultă $x=1$.

42. ***a)*** $V_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b+a&c+a\end{vmatrix}=(c-b)(c-a)(b-a)$.

43. $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^3&b^3-a^3&c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b^2+ba+a^2&c^2+ca+c^2\end{vmatrix}=$ $(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c)$. $\Delta_2=(c-b)(c-a)(b-a)(ab+bc+ca)$.

44. ***b)*** $B=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3+2a+3&b^3+2b+3&c^3+2c+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\2a&2b&2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\3&3&3\end{vmatrix}=$ $=A+2\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a&b&c\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&1\end{vmatrix}=A$. ***c)*** Fie punctele $X(a,f(a))$, $Y(b,f(b))$, $Z(c,f(c))$. Cum

$6\,|\,p^3-p,\forall p\in\mathbb{Z}$, $B=\begin{vmatrix}a&b&c\\f(a)&f(b)&f(c)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&&\\a^3-a&b^3-b&c^3-c\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\6p_1&6p_2&6p_3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\p_1&p_2&p_3\end{vmatrix}=6k$, $k\in\mathbb{Z}$. Cum $S_{XYZ}=\frac{1}{2}|B|\Rightarrow S_{XYZ}=3|k|$.

45. ***a)*** $\Delta=\begin{vmatrix}0&6&1\\1&4&1\\-1&8&1\end{vmatrix}=0$, deci punctele sunt coliniare. ***b)*** $AC:\begin{vmatrix}x&y&1\\0&6&1\\-1&8&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -2x-y+6=0$. **46.** ***a)*** $AB:\begin{vmatrix}x&y&1\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -x+y-1=0$. ***b)*** $\Delta=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&1\\2&4&1\end{vmatrix}=1$, aria este egală cu $\frac{1}{2}$.

47. $\Delta=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\3&a&1\end{vmatrix}=2+a$; $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|=1\Leftrightarrow|\Delta|=2\Leftrightarrow|a+2|=2\Leftrightarrow a+2=\pm2\Leftrightarrow a=0$ sau $a=-4$. **48.** $\Delta=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&-1&1\\a&a+3&1\end{vmatrix}=3a+7$. ***a)*** Punctele sunt coliniare $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow a=-\frac{7}{3}$. Cum $-\frac{7}{3}\notin\mathbb{Z}$, rezultă cerința. ***b)*** Din $\frac{|3a+7|}{2}=1, a\in\mathbb{Z}$ obținem $a=-3$. **49.** ***a)*** $\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\3&5&1\\2&2&1\end{vmatrix}=0$. ***b)*** Prin calcul *sau* observând că punctul D este mijlocul segmentului BC. **50.** ***a)*** Cu notația $\sum x_k=x_1+x_2+x_3$, prin calcul avem $\det(AA')=\begin{vmatrix}\sum a_i^2&\sum a_ib_i\\\sum a_ib_i&\sum b_i^2\end{vmatrix}=\sum_{i\neq j\in\{1,2,3\}}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geq 0$. ***b)*** Din $\det(AA')=0$ rezultă $a_ib_j=a_jb_i, i,j\in\{1,2,3\}$, deci vectorii $\overrightarrow{OP_k}=a_k\vec{i}+b_k\vec{j}, k=1,2,3$ sunt coliniari. Concluzia rezultă.

Tema 2.2 Sisteme de ecuații liniare

1. A este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A)\neq 0$. Cum $\det(A)=-a+3$, avem A inversabilă $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}-\{3\}$.

2. $\det(A)=29\neq0\Rightarrow A$ inversabilă. $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$; $A^*=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{21}\\\delta_{12}&\delta_{22}\end{pmatrix}$; $\delta_{11}=7$; $\delta_{21}=-4$; $\delta_{12}=2$; $\delta_{22}=3$ $\Rightarrow$ $A^{-1}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}7&-4\\2&3\end{pmatrix}$. **3.** $\det(A)=-5\neq0\Rightarrow A$ inversabilă. $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*$;

$A^*=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{21}&\delta_{31}\\\delta_{12}&\delta_{22}&\delta_{32}\\\delta_{13}&\delta_{23}&\delta_{33}\end{pmatrix}$ $\delta_{11}=1$; $\delta_{21}=-2$; $\delta_{31}=3$; $\delta_{12}=-3$; $\delta_{22}=1$; $\delta_{32}=-4$; $\delta_{13}=0$; $\delta_{23}=0$; $\delta_{33}=-5$ $\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2&-3\\3&-1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$.

4. „$\Rightarrow$" $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\Rightarrow\det(A^{-1})\in\mathbb{Z}$, dar $\det(A)\det(A^{-1})=\det(I_n)=1\Rightarrow\det(A)=\pm1$.

„⇐" dacă $\det(A)=\pm 1$, cum $A^{-1}=(\det(A))^{-1}A^{*}\Rightarrow A^{-1}=\pm A^{*}$. Pentru că $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\Rightarrow A^{*}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, deci $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. **5.** $\det(A)=-1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*};\ A^{*}=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{21}&\delta_{31}\\\delta_{12}&\delta_{22}&\delta_{32}\\\delta_{13}&\delta_{23}&\delta_{33}\end{pmatrix}\begin{matrix}\delta_{11}=0; & \delta_{21}=0; & \delta_{31}=1\\\delta_{12}=1; & \delta_{22}=0; & \delta_{32}=0\\\delta_{13}=0; & \delta_{23}=1; & \delta_{33}=0\end{matrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$ *Alternativ,* observăm că $A^3=I_3$, deci $A^{-1}=A^2$. **6.** $\det(A)=m^2+5>0$, deci matricea este inversabilă.

7. ***a)*** $A^2=\begin{pmatrix}17&16&16\\16&17&16\\16&16&17\end{pmatrix}$, $aA+bI_3=\begin{pmatrix}3a+b&2a&2a\\2a&3a+b&2a\\2a&2a&3a+b\end{pmatrix}$. Pentru ca $A^2=aA+bI_3$ este necesar ca $\begin{cases}3a+b=17\\2a=16\end{cases}$, de unde obținem $a=8\Rightarrow b=-7$. ***b)*** $\det(A)=7\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă.

$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$. *Alternativ,* $A^2-8A=-7I_3$, deci $A^{-1}=-\frac{1}{7}(A-8I_3)$.

8. ***a)*** $\det(A)=1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă. $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; **9.** ***a)*** Notăm: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$. Observăm că $\det(A)=-1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă $\Rightarrow\exists A^{-1}$. Cum $A\cdot X=B$, rezultă (înmulțind această egalitate la stânga cu A^{-1}) că $X=A^{-1}\cdot B$. $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}$.

$A^{*}=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{21}\\\delta_{12}&\delta_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}\delta_{11}=5; & \delta_{21}=-2\\\delta_{12}=-3; & \delta_{22}=1\end{matrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$, deci $X=\begin{pmatrix}-1&11\\1&-6\end{pmatrix}$. ***b)*** Notăm: $A=\begin{pmatrix}4&7\\1&2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$. Cum $\det(A)=1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă $\Rightarrow\exists A^{-1}$. Cum $X\cdot A=B$, rezultă (înmulțind această egalitate la dreapta cu A^{-1}) că $X=BA^{-1}$. Avem $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-7\\-1&4\end{pmatrix}$, deci $X=\begin{pmatrix}2&-7\\-4&15\end{pmatrix}$.

10. Deoarece $A^{*}=\det(A)A^{-1}$, ipoteza $A^{-1}=A^{*}$ impune $\det(A)=1\Leftrightarrow -m-3=1\Leftrightarrow m=-4$. **11.** Cum $\det(A)=1$, avem $A^{-1}=A^{*}$. Atunci $AA^{*}=A^{*}A=I_3$. Din definiție rezultă că inversa adjunctei este matricea A. **12.** ***a)*** $\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&13&1\\2&9&0\end{pmatrix}$. ***b)*** $\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&4\\-5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-3&2\\-3&-2\end{pmatrix}$. **13.** Notăm cu A matricea sistemului, $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&1&-3\\5&-2&7\end{pmatrix}$. Avem $\det(A)=\Delta=-131\neq 0$, deci sistemul dat este Cramer. Avem soluție unică, pe care o determinăm cu ajutorul formulelor lui Cramer: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$. Cum $\Delta_x=-131$, $\Delta_y=-131$, $\Delta_z=0$, rezultă $x=1, y=1, z=0$. **14.** Notăm cu A matricea sistemului. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-2\\1&4&4\end{pmatrix}$. Avem $\det(A)=\Delta=12\neq 0$, deci sistemul dat este Cramer. Soluția este dată de formulele $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$. Cum $\Delta_x=-60$, $\Delta_y=60$, $\Delta_z=36$, rezultă $x=-5, y=5, z=3$.

15. $(x,y,z)=(1,1,2)$. **16.** $(x,y,z)=(-1,2,0)$. **17.** $(x,y,z)=(2,1,2)$. **18.** $(x,y,z)=(1,1,1)$. **19.** Cum $\det(A)=0$ și $\exists$ un minor: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4\neq 0\Rightarrow$ rang $(A)=2$. **20.** Rangul lui A este 2, pentru că $\Delta_p=\begin{vmatrix}4&0\\2&6\end{vmatrix}=24\neq 0$, iar bordații lui Δ_p sunt nuli: $\begin{vmatrix}2&-1&3\\2&4&0\\6&2&6\end{vmatrix}=0$ și $\begin{vmatrix}2&-1&3\\2&4&0\\6&2&6\end{vmatrix}=0$. **21.** Considerăm $\Delta_p=\begin{vmatrix}1&2\\4&0\end{vmatrix}=-8\neq 0$. Bordații lui Δ_p sunt: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&-1\\4&0&a\\5&2&3\end{vmatrix}=8a-32$ și $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&1\\5&2&b\end{vmatrix}=32-8b$. Pentru ca $\text{rang}(A)=2$, trebuie ca $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0\Rightarrow a=4$, $b=4$. **22.** $\text{rang}(A)=2$, deoarece $\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\neq 0$ și orice minor de ordin 3 este nul, având două coloane egale. **23.** $\det(A)=-m+2$. Este necesar ca $m=2$. Este și suficient, deoarece $\begin{vmatrix}1&0\\3&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. **24.** Rangul matricei este cel puțin 2, deoarece $\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Cum $\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&-3&-1\\3&2&5\end{vmatrix}=0$ și $\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&-3&-1\\3&2&a\end{vmatrix}=-a+44$, rangul este 2 dacă $a=44$ și 3 în caz contrar. **25.** Avem $\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&-1\\4&3&2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&1&a\\4&3&2\end{vmatrix}=5a-15$, $\begin{vmatrix}1&2&0\\3&1&4\\4&3&b\end{vmatrix}=-5b+20$, deci rangul este 2 dacă $a=3, b=4$ și 3 în caz contrar, i.e. $a\neq 3$ sau $b\neq 4$.

26. Cum $\begin{vmatrix}1&-1&3\\3&2&5\\4&-2&0\end{vmatrix}=-52\neq 0$, rangul este egal cu 3. **27.** ***a)*** rang$(A)=1$, deoarece liniile matricei A sunt proporționale. ***b)*** Pentru $K=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ și $L=(a\quad b\quad c)$ avem $A=KL$.

c) $A^2=\begin{pmatrix} a^2+2ab+3ac & ab+2b^2+3bc & ac+2bc+3c^2 \\ 2a^2+4ab+6ac & 2ab+4b^2+6bc & 2ac+4bc+6c^2 \\ 3a^2+6ab+9ac & 3ab+6b^2+9bc & 3ac+6bc+9c^2 \end{pmatrix}=(a+2b+3c)A$, deci $d=a+2b+3c$.

Alternativ, $A^2=K(LK)L=K(a+2b+3c)L=(a+2b+3c)KL=(a+2b+3c)A$.

28. *a)* $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=O_3$. *b)* $I_3+A+A'=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Cum $\det(I_3+A+A')=0$ și toți minorii de ordin 2 sunt nuli, rezultă că $\text{rang}(I_3+A+A')=1$. *c)* $I_3+A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; $\det(I_3+A)=1$;

$(I_3+A)^{-1}=\dfrac{1}{\det(I_3+A)}\cdot(I_3+A)^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$. **29.** *a)* $A^*=\begin{pmatrix}-6&2&2\\6&-2&-2\\6&-2&-2\end{pmatrix}$; cum $\det(A^*)=0$ și toți minorii de ordin 2 sunt nuli, rezultă $\text{rang}(A^*)=1$.

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ecuația este echivalentă cu sistemul $\begin{cases}x+2y+z=2\\2x+2y=1\\x+4y-3z=5\end{cases}$; considerând A - matricea sistemului, $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&2&0\\1&4&-3\end{pmatrix}$ avem că $\det(A)=0$ și cum $\exists$ un minor $\Delta_p=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2\neq0\Rightarrow$ $\text{rang}(A)=2$. De asemenea, $\text{rang}(\bar{A})=2$, deci sistemul este compatibil nedeterminat.

30. *a)* $\det(A)=\begin{vmatrix}a&a+1&a+2\\b&b+1&b+2\\1&1&a\end{vmatrix}\underset{C_3-aC_1}{\overset{C_2-C_1}{=}}\begin{vmatrix}a&1&-a^2+a+2\\b&1&-ab+b+2\\1&0&0\end{vmatrix}=-ab+b+2+a^2-a-2=a(a-1)-b(a-1)=(a-1)(a-b)$. *b)* Cum minorul $\begin{vmatrix}b&b+1\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq0\Rightarrow\text{rang}(A)\geq2,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$. **31.** *a)* $AB=O_4$; $BA=O_4$. Atunci $AB+BA=O_4$. *b)* Cum $\det(A)=0$ și toți minorii de ordin 2 și 3 sunt nuli $\Rightarrow$ $\text{rang}(A)=1$. Raționând similar, rezultă $\text{rang}(B)=1$. $A+B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A+B)=0$, deci $\text{rang}(A+B)\leq3$. Observăm că $\Delta=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq0$, deci $\text{rang}(A+B)\geq2$. Cum toți minorii de ordin 3 sunt nuli, rezultă că $\text{rang}(A+B)=2$. Deci $\text{rang}(A+B)=\text{rang}(A)+\text{rang}(B)$.

c) $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^{n-k}B^k$. Cum $AB=BA=O_4$, atunci $(A+B)^n=A^n+B^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **32.** Determinantul matricei extinse a sistemului este $\begin{vmatrix}1&2&1\\5&-1&6\\3&-4&0\end{vmatrix}=43\neq0$, deci $\text{rang}(\bar{A})=3>\text{rang}(A)$.

■ Conform teoremei lui Kronecker, sistemul este incompatibil. **33.** Determinantul matricei A a sistemului este $\begin{vmatrix}1&2&1\\a&3&2\\a+1&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$. Concluzia rezultă din teorema lui Cramer. **34.** Determinantul matricei A a sistemului este $\begin{vmatrix}m&1&m\\1&1&m\\3&-1&-2\end{vmatrix}=m^2-3m+2$. Sistemul este compatibil determinat pentru $m\in\mathbb{R}-\{1,2\}$. Pentru $m=1$, sistemul este incompatibil, deoarece primele două ecuaii sunt $x+y+z=1$ și $x+y+z=3$. Pentru $m=2$, sistemul este incompatibil, deoarece $\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&3\\3&-1&12\end{vmatrix}=23\neq0$, deci $\text{rang}(\bar{A})=3>\text{rang}(A)$. În concluzie $m\in\{1,2\}$. **35.** Determinantul matricei A a sistemului este $\begin{vmatrix}3&-4&1\\-1&1&2\\1&4&m^2\end{vmatrix}=-m^2-37\neq0,\forall m\in\mathbb{R}$. Concluzia rezultă din teorema lui Cramer. **36.** Determinantul matricei A a sistemului este $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&a&-1\end{vmatrix}=a+1$. În plus, avem $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\neq0$. Este necesar ca rangul $\text{rang}(A)=2$, deci $a=-1$. Sistemul este compatibil pentru $\begin{vmatrix}1&1&b+1\\2&1&b\\1&-1&-1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-b-2=0\Leftrightarrow b=-2$. Așadar, $a=-1$ și $b=-2$. **37.** Determinantul matricei A a sistemului este $\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&1&1\\1&-2&2\end{vmatrix}=0$. Rangul matricei A este 2, deoarece $\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3\neq0$. Sistemul este compatibil, deoarece minorul caracteristic $\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&2\\1&-2&-1\end{vmatrix}$ este nul. **38.** Determinantul matricei A a sistemului este $\begin{vmatrix}2a&1&1\\1&2a&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=-4(2a^2+a-1)$. Cum sistemul este omogen, rezultă $a\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$. **39.**

a) Înlocuind $x_0=2$, $y_0=2$, $z_0=1$ în ecuațiile sistemului, obținem $n=2$ și $m=3$. *b)* Sistemul admite soluție unică dacă determinantul matricei A a sistemului este nenul; $\det A=\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&-1&1\\n&1&2\end{vmatrix}=3-n$.

Rezultă că $n\in\mathbb{R}-\{3\}$. *c)* Dacă $n\in\mathbb{R}-\{3\}$, sistemul este compatibil determinat. Pentru $n=3$ rezultă că rangul matricei sistemului este 2. Pentru ca sistemul să fie compatibil, rangul matricei extinse trebuie să fie 2. Obținem $m=1$.

40. *a)* Fie A matricea sistemului. Avem $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & m & 2\\ 1 & 2m-1 & 3\\ 1 & m & m-3\end{vmatrix}=(m-1)(m-5)$, deci sistemul este compatibil determinat dacă și numai dacă $m\in\mathbb{R}-\{1,5\}$.

b) Pentru $m = 1$, sistemul devine: $\begin{cases}x+y+2z=1\\ x+y+3z=1\\ x+y-2z=1\end{cases}$, atunci $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ și $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0$.

Considerăm un minor $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$. Pentru a determina $\operatorname{rang}(\bar{A})$, calculăm $\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$, deci $\operatorname{rang}(\bar{A})=2$. Rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat. Pentru $m =$ 5, sistemul devine $\begin{cases}x+5y+2z=1\\ x+9y+3z=1\\ x+5y+2z=4\end{cases}$. Din prima și ultima ecuație, rezultă că 1 = 4, fals. În acest caz sistemul este incompatibil. În concluzie, sistemul este compatibil nedeterminat pentru $m = 1$.

41. *a)* Înlocuind în sistem $z_0=t_0=0$, obținem: $\begin{cases}2x-3y=-1\\ x+9y=3\\ 5x-6y=p\end{cases}$. Sistemul $\begin{cases}2x-3y=-1\\ x+9y=3\end{cases}$ are soluția $x=0, y=\frac{1}{3}$, de unde $p=-2$. *b)* $\Delta_p=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 9\end{vmatrix}=21\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A)\geq 2$. Pentru ca sistemul să fie compatibil nedeterminat trebuie ca $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 9 & m\\ 5 & -6 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3 & -5\\ 1 & 9 & 1\\ 5 & -6 & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 9 & 3\\ 5 & -6 & p\end{vmatrix}=0$, adică $6-3m=21(n+12)=21(p+2)=0$, deci $m=2, n=-12, p=-2$. **42.** *a)* Fie A este matricea sistemului. Avem $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -m\\ m & 1 & m\\ m & 3 & 3\end{vmatrix}=3(1-m^2)$. *b)* Pentru $m\neq\pm1$, sistemul este compatibil, conform teoremei lui Cramer. Dacă $m=1$, avem minorul $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0$. Rezultă că sistemul este compatibil. Dacă $m=-1$, $\Delta_p=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\neq 0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-6\neq 0$, deci sistemul este incompatibil. În concluzie, sistemul este incompatibil pentru $m=-1$. **43.** *a)* Fie A matricea sistemului, atunci $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & m & m\end{vmatrix}=(m-1)^2$. *b)* Dacă

$m\neq 1$, $\operatorname{rang}(A) = 3$. Dacă $m = 1$, $\operatorname{rang}(A) = 1$. *c)* Dacă $m = 1$, $\operatorname{rang}(A)=1$, iar $\operatorname{rang}(\bar{A})=2$, deci sistemul este incompatibil. Dacă $m\neq 1$, sistemul este compatibil. Deci $m = 1$. **44.** *a)* Înlocuind în sistem soluția (1, 1, 1), obținem $a = 2$, $b = 0$. *b)* Pentru ca sistemul să fie compatibil nedeterminat, trebuie ca $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(\bar{A})<3$ (unde A este matricea sistemului).

$\det(A)=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=-a+4$; luând $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 6\\ -1 & -2 & b\end{vmatrix}=b+2$, avem $a=4$ și $b=-2$. *c)* Pentru $b=-2$, avem sistemul $\begin{cases}ax+y+z=4\\ x+2y+3z=6\\ 3x-y-2z=-2\end{cases}$ care este compatibil pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ și pentru care (0, 6, –2) este soluția cu toate componentele întregi.

45. *a)* Fie A matricea sistemului, atunci $\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=a^2+1>0$, $\forall a\in\mathbb{R}$, deci $\det(A)\neq 0$, ceea ce înseamnă că sistemul este Cramer, deci compatibil determinat.

b) Soluția sistemului se obține folosind formulele lui Cramer $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$, cum $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & a & a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=a$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=a^2$, atunci $x=\frac{1}{a^2+1}, y=\frac{a}{a^2+1}, z=\frac{a^2}{a^2+1}$.

Avem: $y^2=\frac{a^2}{(a^2+1)^2}=\frac{1}{a^2+1}\cdot\frac{a^2}{a^2+1}=x\cdot z$, deci x, y, z sunt în progresie geometrică.

46. *a)* Fie A matricea sistemului. Avem $\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & a\end{vmatrix}=-5a+20$. Pentru ca sistemul să fie compatibil determinat, trebuie ca $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow -5a+20\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}-\{4\}$. *b)* Dacă $\Delta\neq 0$, sistemul este compatibil. Dacă $\Delta = 0$, deci $a = 4$, un minor principal este $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}$. Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă $\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & b\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow b\neq 4$. **47.** *a)* Fie A matricea sistemului și $\Delta=\det(A)$. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & p & p^2\\ 1 & q & q^2\\ 1 & r & r^2\end{vmatrix}\underset{L_3-L_1}{\overset{L_2-L_1}{=}}\begin{vmatrix}1 & p & p^2\\ 0 & q-p & q^2-p^2\\ 0 & r-p & r^2-p^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}q-p & q^2-p^2\\ r-p & r^2-p^2\end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)$.

b) Dacă $p, q, r\in\mathbb{C}$ sunt distincte, fiind soluții ale ecuației $t^3-at^2+bt-c=0$, se obține: $\begin{cases}c-pb+p^2a=p^3\\ c-qb+q^2a=q^3\\ c-rb+r^2a=r^3\end{cases}$. Rezultă că $\begin{cases}x=c\\ y=-b\\ z=a\end{cases}$ este soluție a sistemului. Deoarece $\Delta\neq 0$, ea este unică. *c)* Cum (–1, 1, 1) este soluția sistemului, atunci $p^3-p^2-p+1=0$, $q^3-q^2-q+1=0$ și r^3-r^2-r+1

= 0, adică p, q, r verifică ecuația $t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t+1) = 0$ cu rădăcinile $t_1 = t_2 = 1$ și $t_3 = -1$. Deci, oricum le-am alege, două dintre numerele p, q, r vor fi egale cu 1.

48. ***a)*** Fie A matricea sistemului și $\Delta = \det(A)$. Atunci $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14m - 4$.

b) Sistemul fiind omogen, el are soluții nenule dacă $\Delta = 0 \Leftrightarrow 14m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{7}$.

49. ***a)*** Fie A matricea sistemului și $\Delta = \det(A)$. Atunci $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5m$. ***b)*** Sistemul fiind omogen, el are soluții nenule dacă $\Delta = 0 \Leftrightarrow -5m = 0 \Leftrightarrow m = 0$. ***c)*** Dacă $m = 0$, sistemul devine $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, deci orice soluție nenulă a sistemului este de forma: $x = \lambda$, $y = 3\lambda$, $z = -5\lambda$. Atunci: $\frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2} = \frac{35\lambda^2}{15\lambda^2} = \frac{7}{3}$. **50.** ***a)*** Fie A matricea sistemului și $\Delta = \det(A)$. Atunci $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{L_2 - L_1}{\underset{L_3 - L_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & a-b \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = 0$. ***b)*** Sistemul fiind omogen, el are soluții nenule dacă $\Delta = 0$, ceea ce am demonstrat la punctul anterior. ***c)*** Rangul matricei sistemului este egal cu 2; z este necunoscuta secundară, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$; rezultă $y = \lambda$, $x = -(a + b + c)\lambda$. Cum (1, 1, 1) este soluția sistemului, avem că $a + b + c = -1$, deci soluțiile sistemului sunt $(\lambda, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tema 2.3 Structuri algebrice

1. ***a)*** Fie $x, y \in \mathbb{Z} \cap [5, \infty)$. Atunci $x \circ y \geq 5 + 5 - 5 = 5 \Rightarrow x \circ y \in \mathbb{Z} \cap [5, \infty)$. ***b)*** Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Avem $(x \circ y) \circ z = (x + y - 5) \circ z = x + y + z - 10 = x \circ (y \circ z)$. **2.** ***a)*** Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem $(x \circ y) \circ z = \sqrt[5]{(x \circ y)^5 + z^5 - 1} = \sqrt[5]{x^5 + y^5 + z^5 - 2} = x \circ (y \circ z)$. ***b)*** Cum $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt[5]{x^5 + e^5 - 1} = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^5 = 1 \Leftrightarrow e = 1 \in \mathbb{R}$, rezultă că 1 este elementul neutru. **3.** ***a)*** Calcul direct. ***b)*** Trebuie demonstrat că oricare ar fi $x, y \in (-1, \infty)$ rezultă că $x*y \in (-1, \infty)$. Avem $x > 1$, $y >$ $-1 \Rightarrow x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$, deci $(x + 1)(y + 1) > 0$, obținem $xy + x + y + 1 > 0 \Rightarrow 3xy + 3x + 3y + 3 > 0$, deci $3xy + 3x + 3y + 2 > -1$. **4.** ***a)*** Trebuie demonstrat că oricare ar fi $x, y \in (3, \infty)$, rezultă $x * y \in (3, \infty)$. Fie $x > 3, y > 3 \Rightarrow (x - 3)(y - 3) > 0$, deci $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3 > 3$. ***b)*** Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem $(x * y) * z = 2(x * y - 3)(z - 3) + 3 = 2(x-3)(y-3)(z-3) + 3 = x * (y * z)$, deci „*“ este asociativă. ***c)*** Căutăm $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$, adică $(2e - 7)(x - 3) = 0, \forall \in \mathbb{R}$. Obținem $e = 7/2$. **5.** ***a)*** Avem $x \circ y = \frac{1}{2}(x+2)(y+2) - 2$. Fie $x, y \in \mathbb{Q}, x, y \geq -2$. Cum $x + 2 \geq 0, y + 2 \geq 0 \Rightarrow x \circ y \geq -2$. ***b)*** Cum $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+2)(e+2) - 2 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (x+2)(e+2) = 2(x+2), \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = 0$

rezultă că ...

$x \circ x' = x' \circ x = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x'+2) = 4$. Dacă $x \neq -2 \Rightarrow x' = \frac{4}{x+2} - 2 \in \mathbb{Q}$, deci toate elementele din $\mathbb{Q} - \{-2\}$ sunt simetrizabile. Dacă $x = -2$, ecuația $0(x'+2) = 4$ nu are soluții, deci -2 nu este simetrizabil. **6.** ***a)*** Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (xy - 6x - 6y + a) \circ z = x \circ (yz - 6y - 6z + a), \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a - 42)(z - x) = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow a = 42$. ***b)*** Deoarece $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $xe - 6x - 6e + a = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x(e - 7) + 6e + a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 7$ și $a - 6e = 0 \Leftrightarrow a = 42$. **7.** ***a)*** Avem $x \circ y = (x+5)(y+5) + a - 25$. Avem $x \circ y \neq -5, \forall x, y \in \mathbb{Z} - \{-5\} \Leftrightarrow (x+5)(y+5) \neq 20 - a, \forall x, y \in \mathbb{Z} - \{5\} \Leftrightarrow a = 20$. ***b)*** Deoarece $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $xe + 5x + 5e + a = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x(e + 4) + 5e + a = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e = -4$ și $a = 20$. **8.** ***a)*** Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Avem $x \circ y = 5(x + 6/5)(y + 6/5) - 6/5$, deci $(x \circ y) \circ z = 25(x + 6/5)(y + 6/5)(z + 6/5) - 6/5 = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$. ***b)*** Legea are element neutru dacă există $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Z}$, ceea ce revine la $x(5e + 5) + 6e + a = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e = -1, a = 6$. De aici rezultă că pentru $a \in \mathbb{Z} - \{6\}$ legea nu are element neutru. **9.** ***a)*** Legea are element neutru dacă există $e \in (0, 2)$ astfel încât $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in (0, 2) \Leftrightarrow (e - 1)x^2 + (2 - 2e)x = 0, \forall x \in (0, 2) \Leftrightarrow e = 1 \in (0, 2)$. ***b)*** $x \in (0, 2)$ este simetrizabil dacă și numai dacă există $x' \in (0, 2)$ cu $x \circ x' = x' \circ x = 1 \Leftrightarrow xx' = 2 - x - x' + xx'$ $\Leftrightarrow x' = 2 - x \in (0, 2)$, deci toate elementele din $(0, 2)$ sunt simetrizabile. **10.** ***a)*** Avem $x \circ y = x^{\log_{27} y}$. Legea are element neutru dacă există $e \in (0, \infty)$ astfel încât $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in (0, \infty)$ $x^{\log_{27} e} = e^{\log_{27} x} = x$, $\forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow e = 27 \in (0, \infty)$. ***b)*** $x \in (0, \infty)$ este simetrizabil dacă și numai dacă există $x' \in (0, \infty)$ cu $x \circ x' = x' \circ x = 27 \Leftrightarrow (x')^{\log_{27} x} = 27$. Dacă $x \neq 1$, atunci $x' = 27^{\log_x 27} > 0$. Dacă $x = 1$, ecuația $(x')^0 = 27$ nu are soluții, deci mulțimea elementelor simetrizabile este $(0, \infty) - \{1\}$. **11.** ***a)*** Cum $x \circ 2 = 2 \circ x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ rezultă cerința. ***b)*** $x \in \mathbb{Z}$ este simetrizabil dacă și numai dacă există $x' \in \mathbb{Z}$ cu $x \circ x' = x' \circ x = 2$ $\Leftrightarrow x' = \frac{7x - 16}{3x - 7} \Rightarrow 3x' = 7 + \frac{1}{3x - 7}$. Atunci $3x' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $3x - 7 \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow x = 2$, deci singurul element simetrizabil este 2. **12.** ***a)*** Dacă $A, B \in G \Rightarrow AA^t = BB^t = I_2 \Rightarrow (AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AI_2A^t = AA^t = I_2 \Rightarrow AB \in G$, deci G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor. ***b)*** Cum am demonstrat a), rămâne să verificăm în continuare axiomele grupului: G_1 Operația „·“ este asociativă. G_2 Operația „·“ are elementul neutru $I_2 \in G$. G_3 Orice element din G este simetrizabil față de „·“: Dacă $A \in G$ este simetrizabil $\exists A^{-1} \in G_1$ astfel încât $A A^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Avem $A \in G \Rightarrow A \cdot A^t = I_2 \Rightarrow A^{-1} = A^t$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Verificăm $A^t \in G$. Rezultă din $A^t(A^t)^t = A^tA = I_2$. Așadar orice element din G este simetrizabil față de „·“.

13. ***a)*** Cum $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $\sigma^4 = e$, deci G conține 4 elemente. Avem: $G = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ (e fiind permutarea identică).

b)

	e	σ	σ^2	σ^3
e	e	σ	σ^2	σ^3
σ	σ	σ^2	σ^3	e
σ^2	σ^2	σ^3	e	σ
σ^3	σ^3	e	σ	σ^2

c) Cum operația „·" este compunerea permutărilor, verificăm în continuare axiomele grupului. G_1 : Operația „·" este asociativă, ceea ce este evident. G_2: Operația „·" are element neutru care este e. G_3: Orice element din G este simetrizabil față de „·", ceea ce rezultă din tabla înmulțirii permutărilor pe G.

14. *a)* Trebuie demonstrat că oricare ar fi A, $B \in M$ rezultă că $AB \in G$. Fie $A=\begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ și $B=\begin{pmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$. Cum $AB=\begin{pmatrix} a_1a_2+3b_1b_2 & 3(a_1b_2+a_2b_1) \\ a_1b_2+a_2b_1 & a_1a_2+3b_1b_2 \end{pmatrix}$ și $a_1a_2 + 3b_1b_2$, $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$, rezultă că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor. *b)* Fie $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv 0$, 1 sau 2 (mod 3). Pe rând, $a^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 \equiv 1$ (mod 3) sau $a^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 \equiv 2$ (mod 3) sau $a^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 2$ (mod 3) deci $a^2 + 1 \not\equiv 0$ (mod 3). *c)* Presupunem prin absurd că $\det(A) = -1 \Leftrightarrow a^2 - 3b^2 = -1 \Leftrightarrow a^2 + 1 = 3b^2$, fals din b). *d)* Dacă $A \in M$ și $A^{-1} \in M \Rightarrow \det(A) \in \mathbb{Z}$, $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Cum $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_2 = 1 \Rightarrow \det(A), \det(A^{-1}) \in \{-1, 1\}$. Din c) rezultă că $\det(A) = 1$.

15. Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ avem $x*(y*z)=x+y+z+xy+xz+yz+xyz=(x*y)*z$, deci „*" este asociativă. *b)* Se arată prin inducție că $x_1*x_2*\ldots*x_n=(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1$, de unde $1*\frac{1}{2}*\ldots*\frac{1}{2008}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2008}-1=2008$. **16.** *a)* Cum $(x\circ y)\circ z=\frac{xy}{x+y}\circ z=\frac{xyz}{xy+xz+yz}$ și $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}=\frac{xyz}{xy+xz+yz}$, rezultă că $(x\circ y)\circ z=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}$, oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$. *b)* Pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$, avem $(x\circ y)\circ z=\frac{xyz}{xy+xz+yz}$, iar $x\circ(y\circ z)=x\circ\frac{yz}{y+z}=\frac{xyz}{xy+xz+yz}$, adică „∘" este asociativă. *c)* Folosind faptul că „∘" este asociativă și aplicând a) avem $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=\left(\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\right)\circ\frac{1}{5}\circ\frac{1}{6}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=(2+3+4)^{-1}\circ\frac{1}{5}\circ\frac{1}{6}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=$ $\left(\frac{1}{2+3+4}\circ\frac{1}{5}\circ\frac{1}{6}\right)\circ\frac{1}{7}\circ\frac{1}{8}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=(2+3+4+5+6)^{-1}\circ\frac{1}{7}\circ\frac{1}{8}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=$ $\left(\frac{1}{2+3+4+5+6}\circ\frac{1}{7}\circ\frac{1}{8}\right)\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=(2+3+4+\ldots+100)^{-1}=\left(\frac{102\cdot 99}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{5049}$. *Alternativ,* demonstrăm prin inducție $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)^{-1}$. Pentru $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{3},\ldots, x_n=\frac{1}{100}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\ldots\circ\frac{1}{100}=(2+3+\ldots+100)^{-1}=\frac{1}{5049}$.

17. *a)* Trebuie demonstrat că oricare ar fi $f_{a_1b_1}, f_{a_2b_2} \in G$, rezultă $f_{a_1b_1}\circ f_{a_2b_2}\in G$. Cum $f_{a_1b_1}\circ f_{a_2b_2}=f_{a_1a_2,a_1b_2+b_1}\in G$ (deoarece $a_1a_2 \neq 0$ pentru $a_1 \neq 0$ și $a_2 \neq 0$), obținem ceea ce trebuie arătat. *b)* Cum am demonstrat a) rămâne să verificăm în continuare axiomele grupului: 1°. Compunerea funcțiilor este operație asociativă. 2°. $\exists f_{1,0} \in G, f_{1,0}(x) = x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f_{1,0}\circ f_{a,b} = f_{a,b}\circ f_{1,0} = f_{a,b}$, $\forall f_{a,b} \in G$, deci $f_{1,0}$ este element neutru. 3°. $\forall f_{a,b} \in G$, $\exists f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$ astfel încât $f_{a,b}\circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}=f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}\circ f_{a,b}=f_{1,0}$, deci orice element este simetrizabil. **18.** *a)* Din $x*y=1$ rezultă că $x^{\log_3 y}=1$, de unde logaritmând în baza 3 avem $\log_3 y\cdot\log_3 x=0$, deci $x = 1$ sau $y = 1$. *b)* Vom verifica axiomele grupului: G_0: Trebuie demonstrat că $\forall x, y \in H \Rightarrow x*y \in H$. Avem $x*y=x^{\log_3 y}$ și cum $x \in H \Rightarrow x*y > 0$; presupunem prin absurd $x*y=1\Rightarrow x^{\log_3 y}=1 \Rightarrow x = 1$ sau $y = 1$, absurd, deoarece $x, y \in H$. Deci $x*y\in H$.

G_1: Operația „*" este asociativă. Pentru orice $x,y, z \in H$ avem $(x*y)*z=(x^{\log_3 y})*z=x^{\log_3 y\cdot\log_3 z}$, iar $x*(y*z)=x*y^{\log_3 z}=x^{\log_3 z\cdot\log_3 y}$, adică „*" este asociativă.

G_2: Operația „*" are element neutru. Căutăm $e \in H$ astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x \in H$, adică $x^{\log_3 e}=x$, $\forall x \in H$, deci $\log_3 e = 1 \Rightarrow e = 3 \in H$ este element neutru.

G_3: Orice element din H este simetrizabil față de „*". $x \in H$ este simetrizabil dacă și numai dacă $\exists x' \in H$ astfel încât $x*x' = x'*x = 3$. Avem $x^{\log_3 x'}=3 \Rightarrow \log_3 x' \cdot \log_3 x = 1 \Rightarrow x'=3^{\frac{1}{\log_3 x}}$; cum $3^{\frac{1}{\log_3 x}}\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ rezultă că orice element din H este simetrizabil.

În concluzie, H este grup în raport cu operația „*".

19. *a)* Notăm $U(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$. $U(a)U(b)=\begin{pmatrix}1 & \ln a+\ln b & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \ln(ab) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=U(ab)$.

Cum $ab > 0$, rezultă cerința. *b)* Înmulțirea matricelor este asociativă. Elementul neutru este $I_3=U(1)\in G$, iar $U(a)^{-1}=U\left(\frac{1}{a}\right)\in G, \frac{1}{a}>0$. În concluzie, $(G, \cdot)$ este grup.

20. *a)* Calcul direct. *b)* Vom verifica axiomele grupului: G_0: Trebuie demonstrat că oricare ar fi $A(x)$, $A(y) \in G$, rezultă că $A(x) \cdot A(y) \in G$. Arătând deja punctul a), avem $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ și cum $x, y \in \mathbb{R}$, deci $x + y \in \mathbb{R} \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in G$; G_1: Înmulțirea matricelor este asociativă; G_2: Existența elementului neutru, observăm că $I_2 = A(0) \in G$, deci elementul neutru este chiar I_2. ; G_3: Orice element din G este simetrizabil față de înmulțirea matricelor. Dacă $A(x) \in G$ este simetrizabil, $\exists A(x')$ $\in G$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = I_2$.

Avem $A(x) \cdot A(x') = I_2 \Rightarrow A(x + x') = I_2 \Rightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x$, deci $A(x')=\begin{pmatrix}1-2x & -4x\\ x & 1+2x\end{pmatrix}$ și cum $x' \in \mathbb{R}$, obținem $A(x') \in G$ și orice element din G este simetrizabil. *c)* Observăm că $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=A(1)$.

Atunci $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}^n=(A(1))^n=A(n)$. **21.** *a)* Observând că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, din $x*e=e*x=x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem $(x - 5)(e - 5) + 5 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $(x - 5)(e - 6) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $e = 6$. *b)* Din $x*\alpha=\alpha*x=\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem $(x - 5)(\alpha - 5) + 5 = \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $(x - 6)(\alpha - 5) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $\alpha = 5$. *c)* Trebuie demonstrat că oricare ar fi $x, y \in G$, rezultă că $x*y\in G$. Avem $x > 0, y > 5 \Rightarrow x - 5 > 0, y - 5 = 0$ deci $(x - 5)(y - 5) > 0$. Obținem $xy - 5x - 5y + 25 > 0 \Rightarrow xy - 5x - 5y + 30 > 5$, deci G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „*". *d)* Cum am demonstrat c), rămâne să verificăm în continuare axiomele grupului abelian: G_1: Operația „*" este asociativă. Pentru orice $x, y, z \in G$, avem $(x*y)*z=(x-5)(y-5)(z-5)+5=x*(y*z)$, deci „*" este asociativă. G_2: Elementul

neutru al operației „*" este 6. G_3: Orice element din G este simetrizabil față de „*". Fie $x \in G$. Căutăm $x' \in G$ astfel încât $x*x' = x'*x = 6$. Avem $(x-5)(x'-5)+5 = 6 \Leftrightarrow x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in (5,\infty)$. G_4: Operația „*" este comutativă. Pentru $x, y \in G$ arbitrare, avem $x*y = (x-5)(y-5)+5 = y*x$, deci operația „*" este comutativă. În concluzie, $(G,*)$ este grup abelian. ***e)*** $1*2*3*\ldots*2012 = (1*2*3*4)*5*(6*7*\ldots*2012) = 5$, deoarece $x*5 = 5*x = 5, \forall x \in \mathbb{R}$. ***f)*** Inducție după n. **22.** ***a)*** $(x*y)*z = x*(y*z) \Leftrightarrow (a-5)(z-x) = 0, \forall x,y,z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 5$. ***b)*** Cum $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x(6e+5)+6e+a = 0, \forall \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow a = 5, e = -\frac{5}{6} \notin \mathbb{Z}$, deci legea nu are element neutru. ***c)*** $((-1)*2)*((-1)*2013) = a \Leftrightarrow (a-6)^2 + 2(a-6) = 0 \Leftrightarrow a \in \{4,6\}$. ***d)*** Avem $x*y = 6(x+1)(y+1)-1$. Prin inducție rezultă că $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = 6^{n-1}(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1$. Obținem $1*2*3*\ldots*2013 = 6^{2012}\cdot 2014!-1$. ***e)*** Avem $x*p = p, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6(x+1)(p+1) = p+1 \Leftrightarrow p = -1$. ***f)*** Avem $x*x*x = 287 \Leftrightarrow 36(x+1)^3 - 1 = 287 \Leftrightarrow x = 1$. **23.** ***a)*** $(1*2)*3 = 1*(2*3) \Leftrightarrow a = -3$. ***b)*** Dacă legea este asociativă, rezultă din punctul anterior că $a = -3$. Pentru $a = -3$ avem $x*y = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2} \Rightarrow \ (x*y)*z = 4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2} = x*(y*z), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$. ***c)*** Legea are element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, x*e = e*x = x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow x(-2e+2)+3e+a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 1, a = -3$ ***d)*** Dacă $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ este parte stabilă, atunci $\frac{3}{2}*\frac{3}{2} \le \frac{3}{2}$, de unde $a \le -3$. Reciproc, dacă $a \le -3$, atunci pentru $x, y \le \frac{3}{2}$ rezultă $x*y = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+a+\frac{9}{2} \le a+\frac{9}{2} \le \frac{3}{2}$. În concluzie, $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ este parte stabilă dacă și numai dacă $a \le -3$. ***e)*** Fie $G = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$. Avem $x*y = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$. Ca la punctul anterior, rezultă că G este parte stabilă. Legea este asociativă și are element neutru. Fie $x \in G$. Cum $x \circ x' = x' \circ x = 1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x'+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2x+3)} < \frac{3}{2}$, deci toate elementele sunt simetrizabile. ***f)*** Prin inducție se arată că $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = (-2)^{n-1} \prod_{i=1,2,\ldots,n}\left(x_i - \frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, deci $1*2*3*\ldots*2013 = \frac{3-1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 4023}{2}$. **24.** ***a)*** $1*2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{9+a} = 0 \Leftrightarrow a = -9$. ***b)*** Avem $(x*y)*z = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3+2a} = x*(y*z), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$. ***c)*** Legea are element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, x*e = e*x = x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3+e^3 = a} = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow e = -\sqrt[3]{a}$. ***d)*** Legea este asociativă și are element neutru. Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $x \circ x' = x' \circ x = e \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3+x'^3+2} = -\sqrt[3]{2} \quad \Leftrightarrow x' = -\sqrt[3]{4+x^3} \in \mathbb{R}$, deci toate elementele sunt simetrizabile. ***e)*** Prin inducție după n se demonstrează că $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + (n-1)a}$, deci $(-1)*0*1*2*3*4 = \sqrt[3]{114}$. ***f)*** Avem $x*x*x*x*x = \sqrt[3]{5x^3+16} \Rightarrow 5x^3+16 = 1 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{3}$.

25. ***a)*** $f(x)*f(y) = f(x)+f(y)+7 = x+y-7 = f(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R}$, deci f este morfism. Cum f este funcție de grad 1, rezultă că f este bijectivă, deci izomorfism. ***b)*** $1*2*3*\ldots*10 = f(8)*f(9)*f(10)*\ldots*f(17) = f(8+9+\ldots+17) = f(125) = 118$. **26.** ***a)*** $f(x)*f(y) = f(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax+b+ay+b+3 = a(x+y)+b, \forall x,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = -3$, deci f este morfism dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R}$ și $b = -3$. ***b)*** Alegem $a = 1, f(x) = x-3$. Deoarece f este funcție de grad 1, rezultă că f este bijectivă, deci izomorfism. Atunci $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = f(x_1) \circ f(x_2) \circ \ldots \circ f(x_n) = f(x_1+x_2+\ldots x_n+3n) = x_1+x_2+\ldots x_n+3(n-1)$. **27.** ***a)*** $f(x \circ y) = f(x+y-1) = e^{x-1}e^{y-1} = f(x)f(y)$, deci f este morfism. Cum f este bijectivă, rezultă că funcția f este izomorfism. ***b)*** $x \circ x \circ x \circ x = 5 \Leftrightarrow f(x \circ x \circ x \circ x) = f(5) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)^4 = f(5) \Leftrightarrow e^{4x-4} = e^4 \Leftrightarrow x = 2$. **28.** ***a)*** Avem $x \circ y = (x+1)(y+1)-1$. Pentru $x, y \in \mathbb{R}^*$ rezultă că $f(x) \circ f(y) = (f(x)+1)(f(y)+1)-1 = \ = xy-1 = f(xy)$, deci f este morfism. Cum f este bijectivă, rezultă că f este izomorfism. ***b)*** $x \circ x \circ x \circ x \circ x = (x+1)^5 - 1 \Rightarrow (x+1)^5 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[5]{2}-1$. **29.** ***a)*** Legea „$\circ$" are elementul neutru $e = 3$, iar legea „*" are elementul neutru $p = 2$. ***b)*** Dacă f este morfism, atunci $f(e) = p \Rightarrow a = -1$. Pentru $a = -1$ se verifică ușor că f este morfism. **30.** ***a)*** Trebuie să demonstrăm că $f(x+y) = f(x)f(y)$, adică $7^{x+y} = 7^x 7^y$, ceea ce este adevărat, deci f morfism de grupuri. ***b)*** Pentru ca $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*$ să fie izomorfism, știind că f morfism (din a), este necesar ca f să fie bijectivă. Cum pentru $y = -1$, nu există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $7^x = y \Rightarrow f$ nu este surjectivă, deci f nu este bijectivă, ceea ce înseamnă că f nu este izomorfism. **31.** ***a)*** Trebuie demonstrat că $\forall x, y \in G \Rightarrow x*y \in F$. Avem $x > 4, y > 4$, deci $x-4 > 0, y-4 > 0$; obținem $(x-4)(y-4) > 0$, de unde rezultă $xy-4x-4y+16 > 0$, deci $xy-4x-4y+20 > 4$, adică $x*y \in (4,\infty)$. ***b)*** Cum am demonstrat a), rămâne să verificăm în continuare axiomele grupului: G_1: Operația „*" este asociativă. Observând că $x*y = (x-4)(y-4)+4$, avem pentru $\forall x, y, z \in G$, $(x*y)*z = [(x-4)(y-4)+4]*z = (x-4)(y-4)(z-4)+4$, iar $x*(y*z) = x*[(y-4)(z-4)+4] = (x-4)(y-4)/z-4) + 4$, deci $(x*y)*z = x*(y*z)$, adică „*" este asociativă. G_2: Căutăm $e \in G$ astfel încât $x*e = e*x = x, \forall x \in G$, adică $(x-4)(e-4)+4 = x, \forall x \in G$, adică $(x-4)(e-5) = 0, \forall x \in G$, deci $e = 5 \in G$ este elementul neutru. G_3: Orice element din G este simetrizabil față de „*". Dacă $x \in G$ este simetrizabil, $\exists x' \in G$, astfel încât $x*x' = x'*x = 5$, adică $(x-4)(x'-4)+4 = 5$, deci $x'-4 = \frac{1}{x-4}$, de unde rezultă $x' = 4+\frac{1}{x-4}$. Cum $x' \in (4,+\infty) \Rightarrow$ orice element din G este simetrizabil față de G. ***c)*** $f:(0,\infty) \to (4,\infty), f(x) = x+4$ este morfism de la grupul $((0,\infty),\cdot)$ la grupul $(G,*)$, deoarece $f(x\cdot y) = f(x)*f(y)$ (pentru că $f(xy) = xy+4$ iar $f(x)*f(y) = (x+4)*(y+4) = xy+4$, deci $f(xy) = f(x)*f(y)$) și de asemenea, f bijectivă de unde rezultă f izomorfism. **32.** ***a)*** Prin calcul se verifică ușor că $f(xy) = f(x)*f(y), \forall x,y \in (0,\infty)$, deci f este morfism. Inversa funcției f este $g:(-2,2) \to (0,\infty), g(x) = \frac{2+x}{2-x}$, deci f este izomorfism. ***b)*** Fie $u \in (0,\infty)$ cu $f(u) = x$. Atunci $x*x*x = 1 \Leftrightarrow \ f(u)*f(u)*f(u) = f(3) \ \Leftrightarrow f(u^3) = f(3)$ $\Leftrightarrow u = \sqrt[3]{3}$, deci $x = f(\sqrt[3]{3})$.

33. ***a)*** $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1 & x+y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4^{x+y}\end{pmatrix}=A(x+y),\ x+y\in\mathbb{R}$.

b) Înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 3 este asociativă. $I_3=A(0)\in G$ este elementul neutru Fie $A(x)\in G$. Cum $A(x)A(-x)=A(x-x)=A(0)$ $\Rightarrow$ orice element din G este simetrizabil. În concluzie, $(G,\cdot)$ este grup. ***c)*** Funcția $f:\mathbb{R}\to G,\ f(x)=A(x)$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(G,\cdot)$, deoarece $f(x+y)=A(x+y)=A(x)A(y)$. De asemenea, f injectivă pentru că dacă $f(x)=f(y)\Rightarrow A(x)=A(y)\Rightarrow x=y$ și f surjectivă pentru că orice element din G este de forma $A(x)=f(x)$, deci aparține imaginii lui f. Am obținut f bijectivă, deci f izomorfism.

34. ***a)*** Calcul direct. ***b)*** Cum am demonstrat a), rămâne să verificăm în continuare axiomele grupului: G_1: Înmulțirea matricelor este asociativă. G_2: Existența elementului neutru; observăm că $I_2=A(0)\in G$, deci elementul neutru este chiar I_2. G_3: Orice element din G este simetrizabil față de înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 2. $A(x)\in G$ este simetrizabil, $\exists A(x')\in G$ astfel încât $A(x)\cdot A(x')=A(x')\cdot A(x)=I_2$. Avem $A(x)A(x')=A(2xx'+x+x')=A(0)\Rightarrow 2xx'+x+x'=0\Rightarrow x'=\dfrac{-x}{2x+1}$ (dacă, prin absurd, $x'=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{-x}{2x+1}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0=1$, fals, deci $x'\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Am obținut $A(x')\in G$, deci orice element din G este simetrizabil. În concluzie, $(G,\cdot)$ este grup. ***c)*** Deoarece $f(x)f(y)=$

$$=A\left(\frac{xy-1}{2}\right)A\left(\frac{y-1}{2}\right)=A\left(2\cdot\frac{(x-1)(y-1)}{4}+\frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{2}\right)=A\left(\frac{xy-1}{2}\right)=f(xy),$$

f este morfism de grupuri. Funcția f este injectivă pentru că $f(x)=f(y)\Leftrightarrow A\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=A\left(\dfrac{y-1}{2}\right)\Leftrightarrow x=y$ și este surjectivă pentru că orice element din G este de forma $A(x)=f(2x+1)$, deci aparține imaginii lui f.

35. Dacă $A,B\in G$, $\det(AB)=\det A\det B=1$, deci $AB\in G$. Dacă $A\in G$, atunci și $A^{-1}\in G$, deoarece $AA^{-1}=I_2$, $\det(AA^{-1})=\det I_2=1$, $\det A\det(A^{-1})=1$ și cum $\det A=1\Rightarrow\det(A^{-1})=1$.

36. ***a)*** Fie $x,y\in U_n$. Cum $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n=\dfrac{x^n}{y^n}=1\Rightarrow\dfrac{x}{y}\in U_n$, rezultă concluzia. ***b)*** Fie $x\in H$. Atunci $1=x^{\operatorname{ord}H}=x^n\Rightarrow H\subset U_n$. Deoarece mulțimile au același cardinal, rezultă cerința. **37.** ***a)*** H este parte stabilă a lui S_5 în raport cu compunerea permutărilor, deoarece $\forall\sigma^h,\sigma^l\in H\Rightarrow\sigma^h\cdot\sigma^l=\sigma^{h+l}\in H$. De asemenea, $(\sigma^k)^{-1}=\sigma^{-k}\in H$ ($\sigma^0=e$), deci H este subgrup al grupului $(S_5,\cdot)$. ***b)*** Din calcul rezultă că ordinul lui σ este 6. **38.** ***a)*** $\varepsilon^{42}=\cos 30\pi+i\sin 30\pi\Rightarrow\varepsilon^{42}=1$. ***b)*** $1=\left(\cos\dfrac{5\pi}{7}+i\sin\dfrac{5\pi}{7}\right)^k=\cos\dfrac{5k\pi}{7}+i\sin\dfrac{5k\pi}{7}\Leftrightarrow\dfrac{5k}{7}\in 2\mathbb{Z}\Leftrightarrow 14\,|\,k$, deci ordinul elementului ε în grupul U_{42} este 14. ***c)*** H este subgrupul generat de ε. **39.** Avem $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-1)x=0,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, deci $a=1$. **40.** ***a)*** Observăm că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$. Avem $x\circ y=-2\Leftrightarrow(x+2)(y+2)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $y=-2$. ***b)*** Pentru a determina elementele inversabile ale inelului, trebuie mai întâi să determinăm elementul neutru față de operația „$\circ$“, căutăm $e\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ e=e\circ x,\forall x\in\mathbb{Z}$, adică $(x+2)(e+2)-2=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$, deci $(x+2)(e+1)=0,\forall x\in\mathbb{Z}$, de unde $e=-1\in\mathbb{Z}$ este element neutru față de „$\circ$“. Apoi, $x\in U(\mathbb{Z})\Leftrightarrow\exists x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=-1\Leftrightarrow(x+2)(x'+2)=1\Leftrightarrow x+2\in\{-1,1\}\Leftrightarrow x\in\{-3,-1\}\Leftrightarrow U(\mathbb{Z})=\{-3,-1\}$.

c) Funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},f(x)=x-2$ este morfism de inele deoarece avem:

1^0. $f(x+y)=x+y-2=x-2+y-2+2=f(x)*f(y)$.

2^0. $f(xy)=xy-2=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

Funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},f(x)=x-2$ este inversabilă, având inversa $f^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},f^{-1}(y)=y+2$. Prin urmare, f este izomorfism de la inelul $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z},*,\circ)$. **41.** Avem $x*y=e^{\log_2 x\log_2 y}$, $x*(y*z)=e^{\log_2 x\log_2 y\log_2 z}=(x*y)*z$, deci legea este asociativă. Cum $x*2=2*x=e^{\log_2 x}=x$, deci 2 este element neutru. Fie $x\in(0,\infty)-\{1\}$. Cum $x*2^{\log_x 2}=2$, rezultă că x este inversabil. Deoarece $x*(yz)=x^{\log_2 yz}=x^{\log_2 y+\log_2 z}=x^{\log_2 y}x^{\log_2 z}=(x*y)\cdot(x*z)$, rezultă cerința. **42.** ***a)*** Căutăm $e\in\mathbb{Q}$ astfel încât $x\perp e=e\perp x=x$, $\forall x\in\mathbb{Q}$, adică $x+e-5=x,\forall x\in\mathbb{Q}$, deci $e=5\in\mathbb{Q}$ este elementul neutru al legii „$\perp$“. ***b)*** Determinăm pentru început elementul neutru e_1 al operației „$\perp$“, căutăm $e_1\in\mathbb{Q}$ astfel încât $x\perp e_1=e_1\perp x=x,\forall x\in\mathbb{R}$, adică $x+e_1-5=x,\forall x\in\mathbb{Q}$, deci $e_1=5\in\mathbb{Q}$ este elementul neutru pentru „$\perp$“. Apoi, determinăm elementul neutru e_2 al operației „$\top$“. Căutăm $e_2\in\mathbb{Q}$ astfel încât $x\top e_2=e_2\top x=x,\forall x\in\mathbb{Q}$, adică $(x-5)(e_2-5)+5=x,\forall x\mathbb{Q}$, deci $(x-5)(e_2-6)=0$, $\forall x\in\mathbb{Q}$, de unde rezultă $e_2=6\in\mathbb{Q}$ este elementul neutru al operației „$\top$“ (am observat faptul că $x\top y=(x-5)(y-5)+5$). Pentru a demonstra că $(\mathbb{Q},\perp,\top)$ este corp, trebuie ca orice element din $\mathbb{Q}-\{5\}$ să fie inversabil. Dacă $x\in\mathbb{Q}-\{5\}$, $\exists x'\in\mathbb{Q}-\{5\}$ astfel încât $x\top x'=x'\top x=6$, adică $(x-5)(x'-5)+5=6$, deci $x'=\dfrac{5x-24}{x-5}$. Mai trebuie verificat că $x'\in\mathbb{Q}-\{5\}$. Cum $x'\in\mathbb{Q}$, rămâne să arătăm că $x'\neq 5\Leftrightarrow\dfrac{5x-24}{x-5}\neq 5\Leftrightarrow 5x-24\neq 5x-25$, ceea ce este evident. Deci $(\mathbb{Q},\perp,\top)$ este corp. ***c)*** Funcția $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},f(x)=x+5$ este morfism de corpuri, deoarece $\forall x,y\in\mathbb{Q}$, avem: 1^0. $f(x+y)=x+y+5=x+5+y+5-5=f(x)\perp f(y)$

2^0. $f(xy)=xy+5=f(x)\top f(y)$. Funcția $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},f(x)=x+5$ este și bijecție, deoarece $\forall y\in\mathbb{R},\exists!x=y-5\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f(x)=y$. Așadar f este izomorfism de corpuri. ***d)*** Se demonstrează prin inducție după n, că $x_1\top x_2\top\ldots\top x_n=(x_1-5)(x_2-5)\ldots(x_n-5)$, cu $n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{Q}$.

43. Demonstrăm că $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$ este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ dacă și numai dacă este relativ prim cu *n*.

„$\Rightarrow$“ presupunem că $\hat{a}$ este inversabilă în inelul $\mathbb{Z}_n$. Atunci $\exists\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{a}\hat{b}=\hat{1}$. Cum $\widehat{ab}=\hat{a}\hat{b}=1$ rezultă că $n\,|\,ab-1$ (am folosit faptul că $\hat{x}=\hat{y}\Leftrightarrow x(\bmod n)=y(\bmod n)\Leftrightarrow n\,|\,x-y\Leftrightarrow x\equiv y(\bmod n)$). Există deci $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $ab-1=nk$. Așadar $a\cdot b+n(-k)=1\Rightarrow(a,n)=1$.

„$\Leftarrow$“ Reciproc, dacă $(a,n)=1$, $\exists h,k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $ah+nk=1$. Cum $\hat{1}=\overline{ah+nk}=\widehat{ah}+\widehat{nk}=\widehat{ah}+\hat{0}=\hat{a}\hat{h}$, rezultă că $\hat{a}$ este element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_n$ și $\left(\hat{a}\right)^{-1}=\hat{h}$. Deci elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_{10},+,\cdot)$ sunt $\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7},\hat{9}$.

44. ***a)*** Demonstrăm că $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A\in\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\widehat{11}\}$. Fie

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ inversabilă şi fie B inversa ei; atunci $\det(A)\det(B)=\det(AB)=\hat{1}$, deci $\det(A)\in\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\widehat{11}\}$. Reciproc, fie $\det(A)\in\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\widehat{11}\}$. Din $AA^*=\det(A)I_2$, cum $\det A$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_{12}$, rezultă $A(\det(A)^{-1}A^*)=I_2$, deci $\det(A)^{-1}A^*$ este inversa matricei A. ***b)*** Se demonstrează prin calcul că $A^{-1}=A$.

45. ***a)*** $a,b,c\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$, deci fiecare poate lua câte 4 valori. Atunci numărul elementelor mulţimii G este $4\cdot4\cdot4=64$. ***b)*** Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}; X^2=\begin{pmatrix}a^2 & ab+bc\\ 0 & c^2\end{pmatrix}$; $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, rezultă $a^2=\hat{1}, c^2=\hat{0}$ şi $b(a+c)=\hat{0}, a^2=\hat{1}$ pentru $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c^2=\hat{0}$ pentru $c\in\{\hat{0},\hat{2}\}$. Dacă $a=\hat{1}, c=\hat{0}$, atunci $b=\hat{0}$. Dacă $a=\hat{1}, c=\hat{2}$, atunci $b=\hat{0}$. Dacă $a=\hat{3}, c=\hat{0}$, atunci $b=\hat{0}$. Dacă $a=\hat{3}, c=\hat{2}$, atunci $b=\hat{0}$. În concluzie, avem 4 soluţii.

46. ***a)*** Fie $X_1=\begin{pmatrix}a_1 & \hat{2}b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}a_2 & \hat{2}b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}$; $X_1X_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+\hat{2}b_1b_2 & \hat{2}(a_1b_2+a_2b_1)\\ a_1b_2+a_2b_1 & a_1a_2+\hat{2}b_1b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \hat{2}b\\ b & a\end{pmatrix}$. Dacă $X_1X_2=O_2\Rightarrow\det(X_1)\det(X_2)=\hat{0}\Rightarrow\det(X_1)=\hat{0}$ sau $\det(X_2)=\hat{0}$. Fie $\det(X_1)=\hat{0}$. Atunci $a_1^2+b_1^2=\hat{0}$, de unde $a_1=b_1=\hat{0}$, deci $X_1=O_2$, fals. Rezultă că H este parte stabilă a lui G în raport cu înmulţirea. Deoarece $X_1^{-1}=(\det X_1)^{-1}\begin{pmatrix}a_1 & \hat{2}(-b_1)\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}\neq O_2$, rezultă că H este subgrup. ***b)*** Fie $X=\begin{pmatrix}a & \hat{2}b\\ b & a\end{pmatrix}$; $X^2=\begin{pmatrix}a^2+\hat{2}b^2 & ab\\ \hat{2}ab & a^2+\hat{2}b^2\end{pmatrix}$. Dacă $X^2=I_2$ rezultă $a^2+\hat{2}b^2=\hat{1}$ şi $ab=\hat{0}$. Pentru $a=\hat{0}$ nu există $b\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât $a^2+\hat{2}b^2=\hat{1}$. Pentru $b=\hat{0}$, obţinem $a=\hat{1}$ sau $a=\hat{2}$. Soluţiile ecuaţiei sunt $\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$. **47.** ***a)*** Cum în $\mathbb{Z}_7$, $\hat{0}^2=\hat{0}$, $\hat{1}^2=\hat{1}$, $\hat{2}^2=4$, $\hat{3}^2=\hat{2}$, $\hat{4}^2=\hat{2}$, $\hat{5}^2=\hat{4}$ şi $\hat{6}^2=1$, atunci $x^2\in\{\hat{0};\hat{1};\hat{2};\hat{4}\}=H$. ***b)*** $x^{2000}=(x^{1000})^2$, adică $\{x^{2000}\mid x\in\mathbb{Z}_7\}\subset H$. Incluziunea inversă provine din $\hat{0}^{2000}=\hat{0}, \hat{1}^{2000}=\hat{1}$; $\hat{2}^{2000}=\hat{2}^{3\cdot666+2}=\hat{4}$; $\hat{3}^{2000}=\hat{3}^{6\cdot333+2}=\hat{2}$. **48.** ***a)*** $a,b\in\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$. Adică fiecare poate lua 5 valori. Atunci mulţimea M va avea $5\cdot5=25$ elemente.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{a} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in M$, $B=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{a} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in M$. Obţinem $A\cdot B=\begin{pmatrix}\hat{1} & \widehat{a+a} & \widehat{b+b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

c) Cum M este o submulţime finită a grupului matricelor inversabile din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$, şi M este parte stabilă faţă de înmulţire, rezultă cerinţa.

49. ***a)*** $\hat{3}x^2=-\hat{4}$, adică $x^2=\hat{1}$, de unde $(x-\hat{1})(x+\hat{1})=0$ şi cum $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ este corp, nu are divizori ai lui zero, deci $x=\hat{1}$ sau $x=\hat{6}$. ***b)*** Cum $(\hat{3})^6=\hat{1}$ şi $(\hat{3})^k\neq\hat{1}, k=1,2,3,4,5$, $\operatorname{ord}(\hat{3})=6$. ***c)*** Presupunem că există un morfism $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$, deci $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}_6$. Cum $\hat{0}$ este element neutru în $(\mathbb{Z}_6,+)$ şi $\hat{1}$ element neutru în $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$, rezultă că $f(\hat{0})=\hat{1}$. Avem $f(\hat{0})=f(\hat{2}+\hat{2}+\hat{2})=f(\hat{2})\cdot f(\hat{2})\cdot f(\hat{2})=\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}=\hat{6}\neq\hat{1}$. **50.** ***a)*** Fie $X,Y\in H$, $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Atunci $XY=\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_1y_2+x_2\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Cum $x_1,y_1\in\{-\hat{1},\hat{1}\}$, rezultă $x_1y_1\in\{-\hat{1},\hat{1}\}$. Deci $XY\in H$. Folosind proprietăţile înmulţirii în $\mathbb{Z}_5$ se arată că H este grup în raport cu înmulţirea matricelor. ***b)*** Fie $X=\begin{pmatrix}m & n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. $\operatorname{ord}X=2$ dacă şi numai dacă $X^2=I_2, X\neq I_2$. Obţinem $\begin{pmatrix}m^2 & mn+n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde rezultă $m^2=\hat{1}$ şi $n(m+\hat{1})=\hat{0}$. Din $m^2=\hat{1}$ obţinem $m_1=\hat{1}$ şi $m_2=-\hat{1}$. Dacă $m=\hat{1}$, atunci $n=\hat{0}$ şi $X=I_2$, care nu convine. Rămâne $m=\hat{4}$ şi $n\in\mathbb{Z}_5$, deci H are 5 elemente de ordin 2.

Tema 2.4 Polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ

1. $a\neq\pm1\Rightarrow$ grad$(f)=4$; $a=1\Rightarrow$ grad$(f)=1$; $a=-1\Rightarrow$ grad $(f)=2$. **2.** $c=3X^2+X+6$, $r=-2X+9$. **3.** ***a)*** $f(1)=3^{20}+1$; ***b)*** $a_0+a_{40}=4$. **4.** $r=f(1)=1$. **5.** Se impune $f(-1)=f(2)\Leftrightarrow -a=2a+15\Leftrightarrow a=-5$. **6.** ***a)*** $c=X^4-X^3+5X^2-5X+3, r=2$. ***b)*** $c=X^4+2X^3+8X^2+16X+30$, $r=65$. **7.** $f=(X^2-1)c+aX+b$. $\begin{matrix}f(1)=a+b\\ f(-1)=-a+b\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\ -a+b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6\\ a=-3\end{cases}\Rightarrow r=-3X+6$.

8. $r=f(-1)=0\Leftrightarrow a+8=0\Leftrightarrow a=-8$. **9.** $f=X^4+X^3+2X^2+X^2+X+2+(a-1)X+(b-2)$ $=(X^2+X+2)(X^2+1)+(a-1)X+b-2$. $X^2+X+2\mid f\Leftrightarrow a=1$ şi $b=2$.

10. $f=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$, $g=(X^2+X+1)(X+1)$. $d=X^2+X+1$ şi $m=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X+1)$. **11.** ***a)*** $x_1+x_2+x_3=3$. ***b)*** $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=-\dfrac{3}{7}$. **12.** ***a)*** $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=25+4=29$. ***b)*** $\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\dfrac{2}{3}$. ***c)*** Avem $x_i^3=-5x_i^2+2x_i-3$, $i\in\{1,2,3\}$. Fie $S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k$. Prin însumare rezultă că $S_3=-5S_2+2S_1-9=-164$. **13.** ***a)*** $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)\Rightarrow(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)=f(1)=2$. ***b)*** $\dfrac{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)}{x_1x_2x_3x_4}=f(1)=2$. **14.** ***a)*** Avem $x_i^3=x_i^2-3x_i+5$, $i\in\{1,2,3\}$. Prin însumare rezultă $S_3=S_2-3S_1+15$. Analog, deoarece $x_i^4=x_i^3-3x_i^2+5x_i$, $i\in\{1,2,3\}$, prin însumare rezultă $S_4=S_3-3S_2+5S_1$. Cum $S_1=1$ şi $S_2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-5\Rightarrow S_3=-5-3+15=7$ şi $S_4=7+15+5=27$. ***b)*** $\sum x_1^2x_2=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-3x_1x_2x_3=-12$.

15. *a)* $f(-x)=\left(x^2-x+1\right)^{40}+\left(x^2+x+1\right)^4=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Polinomul $g=f(X)-f(-X)$ are o infinitate de rădăcini, deci $g=0$. Rezultă că $f(X)=f(-X)\Rightarrow a_{2k+1}=0\Rightarrow a_{15}=0$. *b)* $a_0+a_1+a_2+...+a_{80}=f(1)=3^{40}+1$. *c)* $a_0+a_2+a_4+...+a_{80}=\frac{f(1)+f(-1)}{2}=f(1)=3^{40}+1$.

16. *a)* $x_1+x_2+x_3=-a\Rightarrow a=0$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b\Rightarrow b=-3$, $x_1x_2x_3=-c\Rightarrow c=2$. *b)* $x_1=\sqrt{2}\Rightarrow x_2=-\sqrt{2}\Rightarrow x_3=-a\in\mathbb{Q}$. *c)* Presupunem că *f* are o rădăcină *k* întreagă. Notăm *g* câtul împărțirii polinomului *f* la $X-k$. Atunci $f(0)f(1)=(-k)(1-k)g(0)g(1)\Rightarrow k(k-1)$ impar, fals.

17. *a)* $f=X\left(X^2+12X+20\right)=X(X+10)(X+2)\Rightarrow x_1=0,x_2=-10,x_3=-2$. *b)* $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=32a^2-120$.

18. *a)* $x_{1,2}=\pm1, x_{3,4}=\pm2$; *b)* $h=4X^4-5X^2+1$. **19.** *a)* $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+...}{x_1x_2x_3x_4}=a$. *b)* $r=(a+8)X-7$. *c)* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{-2}{9}<0$. **20.** *a)* $f(3)-f(1)=80a+2b=2(40a+b)$. *b)* $f(x)-f(y)=a\left(x^4-y^4\right)+b(x-y)$. Cum $x-y\mid x^4-y^4$ rezultă concluzia. **21.** *a)* $f(1)=f(-1)=0\Rightarrow a=-4$, $b=12$. *b)* $x_1=\alpha-r$, $x_2=\alpha$, $x_3=\alpha+r$ și $x_1+x_2+x_3=3\alpha\Rightarrow 3\alpha=3\Rightarrow\alpha=1$. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2r^2+3\Rightarrow 2r^2+3=11\Rightarrow 2r^2=8\Rightarrow r^2=4\Rightarrow r=\pm2\Rightarrow x_1=-1, x_2=1, x_3=3\Rightarrow a=-4$, $b=12$. **22.** *a)* $\hat{f}(\hat{0})=\hat{f}(\hat{1})=\hat{1}\neq\hat{0}\Rightarrow\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$. Cum $\text{grad}(\hat{f})=3\Rightarrow\hat{f}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$. *b)* Dacă $f=g\cdot h$ cu $g,h\in\mathbb{Z}[X]$ și grad $g,h\geq1\Rightarrow g$ și *h* are coeficienții dominanți 1 și deci grad $\hat{g},\hat{h}\geq1$. Rezultă $\hat{f}=\hat{g}\cdot\hat{h}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$, fals. **23.** *a)* $\hat{f}(\hat{0})+\hat{f}(\hat{1})+\hat{f}(\hat{2})=\hat{3}a+\hat{1}=\hat{1}$. *b)* $x_1=\hat{2}$ *c)* *f* e ireductibil ⇔ *f* nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3\Leftrightarrow a=\hat{1}$. **24.** *a)* $g=(X-1)(X-2)$. *b)* $f(2)=1\neq0\Rightarrow X-2$ nu divide polinomul *f*, deci *g* nu divide polinomul *f*. *c)* $f=gc+aX+b, c\in\mathbb{R}[X]$. Din $f(1)=a+b$ și $f(2)=2a+b$ rezultă că $a+b=1, 2a+b=1\Rightarrow a=0, b=1\Rightarrow r=1$. **25.** *a)* $f(0)=n\Rightarrow n=0; f(1)=1+m\Rightarrow m=-1$. *b)* $S_2=-2m=2\Rightarrow m=-1$. *c)* $f=\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-X+1\right)$. **26.** *a)* $g=(X-1)\left(X^2+X+2\right)$; $f(1)=0\Rightarrow a+b=-2\Rightarrow b=-2-a$ Din împărțirea lui *f* la X^2+X+2 se obține $a=-3, b=1$. *b)* $f=(X-1)(X-3)\left(X^2+X+2\right)$. **27.** *a)* $f=X\left(X^2-1\right)-9\left(X^2-1\right)=\left(X^2-1\right)(X-9)\Rightarrow r=0$ și $c=X-9$. *b)* Rădăcinile sunt ±1, ±3, care verifică relația. *c)* $f\left(3^x\right)=0\Leftrightarrow 3^x=\pm1, 3^x=9\Rightarrow x_1=0, x_2=2$. **28.** *a)* $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)=\prod(1-x_i)(1+x_i)=f(1)f(-1)=(a+2)^2$. *b)* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=s_1^2-2s_2=4-2a\Rightarrow 4-2a=8\Rightarrow a=-2$. **29.** *a)* $x_1=x_2=1, x_3=-2$. *b)* $S_1=0$, $S_2=6$, $S_3=-3m$ și $S_4=3S_2-mS_1=18$. *c)* $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6\Rightarrow|x_1|=|x_2|=1$ și $|x_3|=2$. Cum $x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=x_2=1$ și $x_3=-2\Rightarrow m=2$ sau $x_1=x_2=-1, x_3=2\Rightarrow m=-2$. **30.** Rădăcinile raționale ale lui *f* pot fi numai numerele ±1 și $\pm\frac{1}{2}$. Calculând *f*(1), *f*(−1), $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right)$, obținem $a\in\{-5,1\}$. **31.** *a)* Un cmmdc este X^2-1 și un cmmmc este $\left(X^2+1\right)g$. *b)* Mulțimea $U_4\cap U_6=U_2$ are 2 elemente, deci $U_4\cup U_6$ are 8 elemente. **32.** *a)* Fie $\varepsilon\in\mathbb{C}$ o rădăcină a lui *g* și *r* restul împărțirii lui *f* la *g*. Atunci $r(\varepsilon)=f(\varepsilon)=3\varepsilon^2+2\varepsilon+6$. Fie $h=3X^2+2X+6$. Cum $(r-h)(\varepsilon)=0$, *g* are trei rădăcini distincte și $\text{grad}(r-h)\leq2$, rezultă că $r=h$. *b)* Fie $\varepsilon\in\mathbb{C}$ o rădăcină a lui *h* și *r* restul împărțirii lui *f* la *h*. Avem $r(\varepsilon)=f(\varepsilon)=3\varepsilon^2+2\varepsilon+6=3(-\varepsilon-1)+2\varepsilon+6=-\varepsilon+3$. Fie $p=-X+3$. Cu argumentele de mai sus rezultă că $r=p$. *c)* Fie $\varepsilon\in\mathbb{C}$ o rădăcină a lui *t*. Avem $\varepsilon^5=1$ și $r(\varepsilon)=f(\varepsilon)=\varepsilon^4+3\varepsilon^2+\varepsilon+6$. Cu argumentele de mai sus rezultă că $r=X^4+3X^2+X+6$. **33.** Fie *r* restul împărțirii lui *f* la *g*. Atunci $r=aX+b$ și $f=(X+1)^2c+aX+b, c\in\mathbb{R}[X]$. Obținem $f(-1)=-a+b, f'(-1)=a$. Pe de altă parte, $f(-1)=-20$, $f'(-1)=7\Rightarrow a=7$, $b=-13$, $r=7X-13$. **34.** Fie $r=aX^2+bX+c$ restul împărțirii lui *f* la *g*. Obținem $f(0)=c, f(1)=a+b+c, f'(1)=2a+b$. Pe de altă parte, $f(0)=0, f(1)=2^{20}, f'(1)=80\cdot2^{19}$, de unde $r=39\cdot2^{20}X^2-38\cdot2^{20}X$. **35.** Fie $r=aX+b$ restul împărțirii lui *f* la *g*. Atunci $f=(X-1)^2c+aX+b, c\in\mathbb{R}[X]$, deci $a+b=f(1)=-20$, $a=f'(1)=1$. Rezultă $f=(X-1)^2c+X-21$, deci $f(-1)=4c(-1)-22$. Cum $f(-1)=-22$, obținem $c(-1)=0$. **36.** *a)* Un polinom cu proprietatea din enunț este $X^4-X^3+3X^2-5X+1$. *b)* Primele două relații ale lui Viète aplicate lui *g* implică $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=-5<0$, deci nu toate rădăcinile sunt reale. **37.** *a)* Avem $x_i^4-2x_i^3+x_i^2+x_i-1=0$, deci $x_i^3-2x_i^2+x_i+1-\frac{1}{x_i}=0, i=1,2,3,4$. Prin însumare obținem $S_3-2S_2+S_1+4-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=0$. Cum $S_1=2$, $S_2=2$ și $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{s_3}{s_4}=1$, rezultă $S_3=-1$. *b)* Avem $S_4-2S_3+S_2+S_1-4=0$, deci $S_4=-2<0$, de unde rezultă concluzia. **38.** *a)* Suma cerută este egală cu $S_2+2S_1+4=4a^2-6b-4a+4$. *b)* Pentru $a=b=2$, suma anterioară este egală cu 0, deci toate rădăcinile sunt egale cu −1. De aici $c=4$, $d=1$. **39.** *a)* Cum gradul lui *f* este 3, rezultă că polinomul are o rădăcină reală *a*. Dacă $a\leq0$, rezultă $f(a)<0$, fals. Deci $a>0$. *b)* Din punctul anterior rezultă că *f* are rădăcinile $x_1,x_2,x_3>0$. Cum $x_1+x_2+x_3=p=3$ și $x_1x_2x_3=r=1$, rezultă că $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$, deci $x_1=x_2=x_3=1$. Obținem $q=3$. **40.** Presupunem că *f* are toate rădăcinile reale. Atunci *f'*, deci și *f''* au toate rădăcinile reale. Cum $f''=12X^2+6aX+2a$, avem $\Delta=3a(3a-8)\geq0$, deci $a\in(-\infty,0]\cup\left[\frac{8}{3},\infty\right)$, fals. **41.** Pentru $x\in\mathbb{R}$, avem $f(x)=x^2(x+2)^2+(x-3)^2+a-9>0$. Deci *f* nu are nicio rădăcină reală. **42.** Cum $f=(X+1)\left(X^2+(a-1)X+1\right)$ rezultă că $f(-1)=0$, iar celelalte două rădăcini ale lui *f* sunt rădăcinile lui $X^2+(a-1)X+1$. Cum $\Delta=(a-1)^2-4$, *f* are toate rădăcinile reale dacă și numai dacă $\Delta\geq0\Leftrightarrow a\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$. **43.** Folosim șirul lui Rolle pentru funcția derivabilă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3-12x+m$. Avem ±2 rădăcini pentru *g'*, *f* are toate rădăcinile reale dacă și numai dacă $g(-2)\geq0$ și $g(2)\leq0\Leftrightarrow m\in[-16,16]$. **44.** Fie $x\in\mathbb{C}^*$. Avem $f(x)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+a+2=0\Leftrightarrow t^2+2t+a+2=0$, unde $t=x-\frac{1}{x}$. Dacă $x\in\mathbb{R}$, atunci $t\in\mathbb{R}$,

deci $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4-4(a+2) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Dacă $a \leq -1$, atunci ecuaţia $t^2+2t+a+2=0$ are rădăcinile t_1, t_2 reale. Cum rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale lui f sunt soluţiile ecuaţiilor $x^2-t_i x-1=0, i=1,2$, cu $\Delta = t_i^2+4>0$, rezultă că f are toate rădăcinile reale. În concluzie, $a \leq -1$. **45.** *a)* Avem $a_1 = f'(0)$. Cum $f' = 30\left(X^2+X+2\right)^{29}(2X+1)+30\left(X^2-X+3\right)^{29}(2X-1)$, rezultă că $a_1 = 30\left(2^{29}-3^{29}\right)$. *b)* Cum $x^2+x+2>0$ şi $x^2-x+3>0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f nu are nicio rădăcină reală. **46.** Cum gradul lui f este 3, rezultă că polinomul este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă nu are rădăcini raţionale. Vom determina valorile întregi ale lui a pentru care f are rădăcini raţionale. Dacă $f\left(\frac{p}{q}\right)=0, p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, atunci $p,q \mid 1$, deci $\frac{p}{q} = \pm 1$. Cum $f(1)=a+3, f(-1)=1-a$, rezultă că f are rădăcini raţionale dacă şi numai dacă $a=-3$ sau $a=1$. În concluzie, valorile întregi ale lui a pentru care f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ sunt $a \in \mathbb{Z}-\{-3,1\}$. **47.** Dacă $a=\hat{0}$, atunci $f(\hat{0})=\hat{0}$. Dacă $a=\hat{1}$, atunci $f(\hat{2})=\hat{0}$. Dacă $a=\hat{2}$, atunci $f(\hat{1})=\hat{0}$. Rezultă cerinţa. **48.** Avem $f(\hat{0})=a, f(\hat{1})=a+\hat{3}$, $f(\hat{2})=f(\hat{3})=f(\hat{4})=a+\hat{4}$. Deci f are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$ dacă şi numai dacă $a \in \{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$. Cum gradul lui f este 3, rezultă că polinomul este ireductibil peste $\mathbb{Z}_5$ dacă şi numai dacă nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$, i.e. $a \in \{\hat{3},\hat{4}\}$. **49.** *a)* Cum $x^5=x, \forall x \in \mathbb{Z}_5$, rezultă că $f(x)=x^4+\hat{4}x^4+\hat{3}=\hat{3}\neq\hat{0}$, de unde rezultă concluzia. *b)* $f=\left(X^4+\hat{1}\right)\left(X^4+\hat{3}\right)$. **50.** *a)* $f=\left(X^2+\hat{1}\right)\left(X^2+X+\hat{2}\right)$. *b)* Cum $x^3=x, \forall x \in \mathbb{Z}_3$, avem $f(x)=x^4+x^3+x+\hat{2}=x^3+x^2+x+\hat{2}=$ $=g(x), \forall x \in \mathbb{Z}_3$, unde $g=X^3+X^2+X+\hat{2}$. Cum gradul lui g este 3 şi g nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, rezultă că g este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$.

Tema 3.1 Limite de şiruri. Limite de funcţii. Funcţii continue. Funcţii derivabile

1. *a)* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right)=+\infty$, întrucât $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$ (cu regula lui L'Hospital). *b)* $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este crescătoare. *c)* $f''(x)=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$; punctele de inflexiune sunt -1 şi 1.

2. *a)* Avem $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ (cu L'Hospital!) şi $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$, deci $y=x$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f spre $-\infty$. Cum $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. *b)* $f'(x)=-\frac{1}{e^x+1}<0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare. *c)* Deoarece f are proprietatea lui Darboux (fiind continuă), este descrescătoare şi $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$.

3. *a)* Avem $f(x)=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$ şi $f'(x)=2(2x-5)(x^2-5x+5)$. Ecuaţia $f'(x)=0$ are rădăcinile reale $x_1=\frac{5}{2}$ şi $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Alternativ, afirmaţia rezultă aplicând teorema lui Rolle funcţiei f pe intervalele $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$. *b)* Calcul direct. *c)* $\min f(x)=-1$ (vezi tabelul de variaţie).

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. *a)* $f'(x)=\frac{2x+1}{x+1}-2x\cdot\ln\frac{x+1}{x}, \forall x>0$. *b)* $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+1}-2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)=2-2\ln e=0$.

c) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\downarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\downarrow 0}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{y\downarrow 0}\frac{1-\frac{1}{y+1}}{2y}=\lim_{y\downarrow 0}\frac{1}{2(y+1)}=\frac{1}{2}$ (cu L'Hospital!).

5. *a)* $f'(x)=e^x-1, \forall x \in \mathbb{R}$. Funcţia f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,+\infty)$. Singurul punct de extrem al funcţiei este $x=0$ (punct de minim). *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$ (se aplică regula lui L'Hospital). *c)* Din *a)* rezultă că $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

6. *a)* $f'(x)=\frac{1-x^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$. *b)* $\lim_{x\to\infty}(1+f(x))^x=e$. *c)* Din tabelul de variaţie rezultă $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

7. *a)* $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}<0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare. *b)* $f''(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă. *c)* $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$, deci

dreapta $y=0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Apoi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y^2+1}+y}{-y}=-2$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}=0$, deci dreapta de ecuaţie $y=2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

8. ***a)*** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ şi $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to-1}f'(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=+\infty$, conform unei consecinţe a teoremei lui Lagrange, f are derivată, dar nu este derivabilă în punctele $x=\pm1$ şi $f'(-1)=-\infty$, $f'(1)=+\infty$. ***b)*** Unicul punct de extrem local al funcţiei f este $x=0$. ***c)*** $f''(x)=-\frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Singurele puncte de inflexiune ale funcţiei sunt $x=-1$ şi $x=1$ (vezi punctul ***a)***).

9. ***a)*** $f'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$ şi $f''(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}>0$, $\forall x>0$, deci f este convexă. ***b)*** Putem scrie $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$, de unde obţinem că $a_n=\ln(n+1)-\ln(2n+1)=\ln\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)\to\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$. ***c)*** Avem $f''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$, de unde rezultă că $b_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}\to1$.

10. ***a)*** $\lim\limits_{x\downarrow0}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, deci $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta, iar $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. ***b)*** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $\forall x>0$. Singurul punct de extrem al funcţiei f este $x=e$. ***c)*** $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$, $\forall x>0$. Obţinem că f are un singur punct de inflexiune, anume $x=e\sqrt{e}$.

11. ***a)*** Se arată prin inducţie matematică. ***b)*** $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $-\infty$. Graficul lui f nu are asimptote verticală şi nici asimptotă spre $+\infty$. ***c)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_n(a)}{f_n(a)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(p+p^2+p^3+\ldots+p^n\right)e^{pa}}{p^ne^{pa}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p\left(p^n-1\right)}{(p-1)p^n}=\frac{p}{p-1}$.

12. ***a)*** $x=0$ este asimptotă verticală la stânga, $y=-x-1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, iar $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. ***b)*** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$. Se arată că $\lim\limits_{x\uparrow-2}f'(x)=-\sqrt{e}$ şi $\lim\limits_{x\downarrow-2}f'(x)=\sqrt{e}$, de unde, conform unei consecinţe a teoremei lui Lagrange, rezultă că f are derivate laterale în $x=-2$ şi $f_s'(-2)=-\sqrt{e}$, $f_d'(-2)=\sqrt{e}$, adică f nu este derivabilă în $x=-2$. ***c)*** $f''(x)=\frac{3x-2}{x^4}$, dacă $x<-2$ şi $f''(x)=-\frac{3x-2}{x^4}$, pentru $x>-2$, $x\neq0$. Funcţia f'' se anulează doar în $x_0=\frac{2}{3}$, care este unicul punct de inflexiune al funcţiei f, întrucât f'' îşi schimbă semnul de o parte şi de alta a acestui punct (faceţi tabelul de semn!).

13. ***a)*** $f(1-0)=f(1)=f(1+0)=1$, deci f este continuă în $x=1$. Cum f este continuă pe $(0,1)\cup(1,\infty)$ (operaţii cu funcţii continue), rezultă că f este continuă pe $(0,\infty)$. ***b)*** Funcţia este derivabilă pe $(0,1)\cup(1,\infty)$, iar $f'(x)=1+\frac{1}{x}$, dacă $x\in(0,1)$ şi $f'(x)=\frac{x-1-\ln x}{x(x-1)^2}$, dacă $x>1$.

Cum $\lim\limits_{x\uparrow1}f'(x)=2$ şi $\lim\limits_{x\downarrow1}f'(x)=\frac{1}{2}$, rezultă că $f_s'(1)=2$, $f_d'(1)=\frac{1}{2}$, deci f nu e derivabilă în $x=1$. ***c)*** $\lim\limits_{x\uparrow1}(f(x))^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\uparrow1}e^{\frac{\ln f(x)}{x-1}}=e^2$, deoarece $\lim\limits_{x\uparrow1}\frac{\ln f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\uparrow1}\frac{\ln(x+\ln x)}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\uparrow1}\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}=2$.

14. ***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$, deci dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. ***b)*** Deoarece $0<f(x)<\frac{1}{2}$, $\forall x>0$, rezultă $0<a_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall n\geq1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. ***c)*** Avem $g''(x)=\frac{6\left(1-2x^2\right)}{\left(2x^2+3\right)^3}$; studiind semnul lui g'', obţinem că punctele de inflexiune ale funcţiei g sunt $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

15. ***a)*** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}=-1$. ***b)*** $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+|x|}=1$. ***c)*** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, întrucât $f|_{(-\infty,0)}$ şi $f|_{(0,\infty)}$ sunt funcţii elementare. Din punctul ***a)*** rezultă că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi este strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, rezultă că $\operatorname{Im} f=(-1,1)$.

16. ***a)*** $\lim\limits_{x\downarrow-1}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\uparrow1}f(x)=+\infty$, deci dreapta de ecuaţie $x=-1$ este asimptotă verticală la dreapta, iar dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la stânga. ***b)*** $f''(x)=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}$, $\forall x\in(-1,1)$. Singurul punct de inflexiune al graficului funcţiei f este $x=0$. ***c)*** Pentru orice $x>1$ avem $x^\alpha f\left(\frac{1}{x}\right)=x^\alpha\cdot\ln\frac{x+1}{x-1}=x^{\alpha-1}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$ şi cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2$, rezultă că limita cerută este egală cu 0 dacă $\alpha<1$, cu 2 dacă $\alpha=1$, respectiv cu $+\infty$ dacă $\alpha>1$.

17. ***a)*** Deoarece $f(x)=e^{\ln f(x)}$ şi $\lim\limits_{x\downarrow0}\ln f(x)=\lim\limits_{x\downarrow0}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\ln(1+y)}{y}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y+1}=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\downarrow0}f(x)=e^0=1$. ***b)*** $y=e$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $+\infty$. ***c)*** $\lim\limits_{x\to\infty}x(1-\ln f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{y\downarrow0}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{y\downarrow0}\frac{1}{2(y+1)}=\frac{1}{2}$.

18. ***a)*** $f'(x)=-\frac{x}{x+1}$, $\forall x>-1$. Funcţia f este strict crescătoare pe $(-1,0]$ şi strict descrescătoare pe $[0,\infty)$. ***b)*** Din ***a)*** rezultă $f(x)\leq f(0)=0$, $\forall x>-1$, adică $\ln(1+x)\leq x$, $\forall x>-1$. ***c)*** $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

19. ***a)*** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}^*$. Avem $f'(x)=\frac{-3x+1}{2\sqrt{-x}}$, dacă $x<0$ şi $f'(x)=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$, dacă $x>0$. Deoarece $\lim\limits_{x\uparrow0}f'(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\downarrow0}f'(x)=-\infty$, conform unei consecinţe a teoremei lui Lagrange, rezultă că $f_s'(0)=+\infty$ şi $f_d'(0)=-\infty$, deci f nu este derivabilă în $x=0$. ***b)*** Singurul punct de extrem local al funcţiei f este $x=\frac{1}{3}$. ***c)*** $f''(x)=-\frac{3x+1}{4x\sqrt{-x}}$, dacă $x<0$ şi $f''(x)=\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$, dacă $x>0$. Singurul punct de inflexiune al funcţiei f este $x=-\frac{1}{3}$.

20. *a)* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt[3]{(x^3+3x+4)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x+4}+x^2}=0$, deci dreapta de ecuaţie $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. *b)* $f'(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x+4)^2}}=\frac{x^2+1}{f^2(x)}$, $\forall x>0$.

c) $f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x^3+3x+4}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+4)}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+4}{(x+1)^2}}=\infty$.

21. *a)* *f* este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (operaţii cu funcţii continue!) şi $f(0-0)=f(0)=f(0+0)=1$, deci *f* este continuă pe $\mathbb{R}$. *b)* Avem $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ \sqrt{1-x}, & x\in[0,1]\\ \sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}$ şi $f'(x)=\begin{cases}2^x\ln 2, & x<0\\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & x\in(0,1)\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, & x>1\end{cases}$.

Folosind o consecinţă a teoremei lui Lagrange, deducem că $f_s'(0)=\ln 2$, $f_d'(0)=-\frac{1}{2}$, $f_s'(1)=-\infty$ şi $f_d'(1)=+\infty$, deci $x=0$ este punct unghiular, iar $x=1$ este punct de întoarcere al graficului lui *f*.
c) Ecuaţia tangentei este $y-f(5)=f'(5)(x-5)\Leftrightarrow x-4y+3=0$.

22. *a)* $y-f(0)=f'(0)\cdot x\Leftrightarrow y=-x+1$ *b)* $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}+x^2}=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă (orizontală) la graficul funcţiei *f* spre $+\infty$. *c)* Conform cu *a)*, limita de calculat este nedeterminare de tip $[1^\infty]$. Cum $(f(n))^n=\left[(1+(f(n)-1))^{\frac{1}{f(n)-1}}\right]^{n(f(n)-1)}$ şi $\lim_{n\to\infty}n(f(n)-1)=\lim_{n\to\infty}n\left[\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-(n+1)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2}{\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}=-1$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}(f(n))^n=e^{-1}$.

23. *a)* $f(x)=\frac{a-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\forall x<0$. Rezultă că $f(0-0)=\frac{1}{2}$ dacă $a=1$, $f(0-0)=-\infty$, dacă $a<1$ şi $f(0-0)=+\infty$, dacă $a>1$. *b)* Funcţia *f* este continuă pe $\mathbb{R}^*$. Pentru ca *f* să fie continuă în origine, din *a)* rezultă $a=1$. Cum $f(0+0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+be^x)=b=f(0)$, rezultă că *f* este continuă în origine dacă şi numai dacă $a=1$ şi $b=\frac{1}{2}$. *c)* $f_s'(0)=0$ şi $f_d'(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow f$ nu este derivabilă în 1.

24. *a)* $f(x)\le x+1$, $\forall x<0$, şi $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.
b) Deoarece $\lim_{x\uparrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\uparrow0}\left(1-\frac{1-\cos x}{x}\right)=1$ şi $\lim_{x\downarrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow0}\left(x+\frac{e^x-1}{x}\right)=1$, rezultă că *f* este derivabilă în $x=0$ şi $f'(0)=1$.

c) $\lim_{n\to\infty}n\left(f(\sqrt[n]{2})-f(1)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(2^{\frac{1}{n}}\right)-f(1)}{2^{\frac{1}{n}}-1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)=f'(1)\ln 2=\ln 2$.

25. *a)* Cu regula lui L'Hospital, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală la graficul lui *f* spre $+\infty$. *b)* $f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$, $\forall x\in(0,\infty)$. Funcţia $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $u(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$ este derivabilă şi $u'(x)=-\frac{x}{(x+1)^2}<0$, $\forall x\in(0,\infty)$. Rezultă că *u* este strict descrescătoare şi atunci $u(x)<u(0+0)=0$ pentru orice $x>0$, deci $f'(x)<0$, $\forall x\in(0,\infty)$. Prin urmare, *f* este strict descrescătoare. *c)* Avem $f(0+0)=1$ şi $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Cum *f* are proprietatea lui Darboux şi este strict descrescătoare, rezultă că $f((0,\infty))=(0,1)$, deci *f* este mărginită.

26. *a)* $f(\mathbb{R})=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,\infty)$, care nu este interval, deci *f* nu are proprietatea lui Darboux.
Soluţie alternativă: cum $f(0-0)=-1$ şi $f(0+0)=1$, rezultă că *f* are în origine o discontinuitate de prima speţă, deci *f* nu are proprietatea lui Darboux.
b) $\lim_{x\uparrow0}\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\uparrow0}\left(\frac{1}{x^2}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)=\lim_{x\uparrow0}\left(2+\frac{1-x}{x^2}\right)=+\infty$.
c) $\lim_{x\uparrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\uparrow0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\infty$ şi $\lim_{x\downarrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow0}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty$, deci *f* are derivată în $x=0$ şi $f'(0)=\infty$.

27. *a)* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{xe^{-x}}\right)=1$ şi $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}e^x=0\Rightarrow y=x$ este asimptotă la graficul lui *f* spre $-\infty$. *b)* $f'(x)=1+e^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă. Cum *f* are proprietatea lui Darboux şi $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$, rezultă că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci *f* este surjectivă.
c) Folosind teorema de derivare a funcţiei inverse obţinem: $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$.

28. *a)* $|f(x)|=x^2\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2$, $\forall x\ne0\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=0$. *b)* Funcţia *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Deoarece $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$ (cu criteriul majorării), rezultă că *f* este derivabilă în origine şi $f'(0)=0$. Aşadar, *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
c) Fie *V* o vecinătate a lui 0. Este suficient să arătăm că există $a,b,c\in V, a<b<c$ cu $f(a)<f(b)>f(c)$. Fie şirurile $u_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}$ şi $v_n=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$, $n\ge1$. Cum $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=0$, există un rang $N\ge1$ astfel încât $u_n,v_n\in V$ pentru $n\ge N$. Luând $a=u_N, b=0$ şi $c=v_N$, rezultă că *f* nu este monotonă pe *V*.

29. *a)* Din faptul că $|\text{arctg}x|<\frac{\pi}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. Pentru a doua limită avem: $\lim_{x\to\infty}xg(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{\text{arctg}y}{y}=1$. *b)* $f'(x)+g'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.
c) Conform unei consecinţe a teoremei lui Lagrange, rezultă că $f+g$ este constantă pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$, deci există $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $\text{arctg}x+\text{arctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}C_1, & x\in(-\infty,0)\\ C_2, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

Pentru $x=-1$ şi $x=1$ obţinem $C_1=-\frac{\pi}{2}$ şi $C_2=\frac{\pi}{2}$, deci $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}(x), \forall x\in\mathbb{R}^*$.

30. *a)* $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ***b)*** Funcţia $u:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, u(x)=x\cos x-\sin x$ este derivabilă şi $u'(x)=-x\sin x<0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci u este strict descrescătoare. Ca urmare, $u(x)<u(0+0)=0, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, de unde rezultă că $f'(x)<0, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict descrescătoare. ***c)*** Deoarece f are proprietatea lui Darboux (fiind continuă), este descrescătoare, $f(0+0)=1$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{2}{\pi}$, rezultă că $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\frac{2}{\pi},1\right)$.

31. *a)* $f'(x)=\frac{1-x}{x}, \forall x\in(0,\infty)$. Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++++$		0		$----------$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Funcţia f este strict crescătoare pe $(0,1]$ şi strict descrescătoare pe $[1,\infty)$.

b) Condiţia este echivalentă cu $a\ge\max\limits_{x>0}f(x)$. Valoarea maximă a funcţiei este $f(1)=-1$; rezultă că $a\in[-1,\infty)$. ***c)*** Folosind şirul lui Rolle pentru funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-m$, din tabelul

x	0	1	∞
$g(x)$	$-\infty$	$-m-1$	$-\infty$

obţinem că ecuaţia $f(x)=m$ nu are soluţii pentru $m\in(-1,\infty)$, are o singură soluţie pentru $m=-1$ (pe 1) şi două soluţii pentru $m\in(-\infty,-1)$.

32. *a)* $f'(x)=\frac{x}{x+1}, \forall x>-1\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-1,0]$ şi este strict crescătoare pe $[0,\infty)$. ***b)*** Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$----------$		0		$+++++++++$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cum f este continuă, obţinem că $f((-1,\infty))=[0,\infty)$. ***c)*** Deoarece $f(x)>0$ pentru orice $x>0$, prin inducţie obţinem $a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. Şirul $(a_n)_{n\ge0}$ este strict descrescător întrucât $a_{n+1}-a_n=-\ln(1+a_n)<0, \forall n\in\mathbb{N}$. Fiind descrescător şi mărginit inferior de 0, şirul este convergent. Dacă $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, trecând la limita în relaţia de recurenţă rezultă $a=a-\ln(1+a)$, de unde $a=0$.

33. *a)* f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)>0$, deci f e strict crescătoare.

b) Întrucât f are proprietatea lui Darboux şi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\pm1$, rezultă că $f(\mathbb{R})=(-1,1)$, deci f este surjectivă. ***c)*** Din ***b)*** rezultă că $x_n\in(-1,1), \forall n\in\mathbb{N}$. Cum $x_1<x_0$ şi f este strict crescătoare, prin inducţie se obţine că $(x_n)_{n\ge0}$ este strict descrescător. Fiind monoton şi mărginit, şirul $(x_n)_{n\ge0}$ este convergent.

M. ANDRONACHE • D. ŞERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

34. *a)* $f'(x)=\ln x+1, \forall x>0\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x}>0, \forall x>0$, deci f este convexă. ***b)*** Existenţa punctului c_n rezultă din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei f pe intervalul $[n,n+1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, iar unicitatea este asigurată de faptul că f' este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. ***c)*** Avem $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$, de unde $c_n=\frac{n+1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. De aici rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$.

35. *a)* Pentru şirurile $a_n=(2n\pi)^2\to\infty$ şi $b_n=\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2\to\infty$ avem $f(a_n)=1\to1$ şi $f(b_n)=0\to0$, de unde rezultă că f nu are limita la $+\infty$. ***b)*** Pentru orice $x>0$ avem $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}$, de unde rezultă că $f_d'(0)=-\lim\limits_{x\downarrow0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}=-\lim\limits_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2}=-\frac{1}{2}$.

c) Avem: $f(n+1)-f(n)=-2\sin\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$, de unde rezultă că: $|f(n+1)-f(n)|\le2\left|\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right|=2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|\to0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n))=0$.

Soluţie alternativă: Conform teoremei lui Lagrange, pentru orice $n\ge1$, există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)=-\frac{\sin\sqrt{c_n}}{2\sqrt{c_n}}$. Întrucât $c_n\to\infty$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n))=0$.

36. *a)* $f'(x)=\frac{\sqrt{x}\cdot(2-\ln x)}{2x^2}, \forall x>0$. ***b)*** $f'(x)>0, \forall x\in(0,e^2)$ şi $f'(x)\le0, \forall x\in[e^2,\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,e^2]$ şi strict descrescătoare pe $[e^2,\infty)$. ***c)*** Deoarece $\ln3^{\sqrt5}=\sqrt5\ln3$ şi $\ln3^{\sqrt5}=\sqrt5\ln3$ şi, conform cu ***b)***, $f(3)<f(5)\Leftrightarrow\frac{\ln3}{\sqrt3}<\frac{\ln5}{\sqrt5}$, rezultă $\sqrt5\ln3<\sqrt3\ln5\Leftrightarrow3^{\sqrt5}<5^{\sqrt3}$.

37. *a)* $x^\alpha f(x)=\frac{2x^\alpha}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+1}\cdot x^{\alpha-\frac{2}{3}}$, pentru orice $x>0$.

Pentru $\alpha<\frac{2}{3}$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=0$, pentru $\alpha>\frac{2}{3}$ obţinem $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=+\infty$, iar dacă $\alpha=\frac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=\frac{2}{3}$. ***b)*** $f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$; de unde obţinem că $x=-1$ este singurul punct de extrem al fracţiei f. ***c)*** Inegalitatea se scrie : $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow f(5)<f(3)$. Folosim apoi faptul că $f'(x)<0$, $\forall x>0$, adică f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

38. *a)* $f'(x)=(x^2+2x)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$, deci punctele de extrem local ale funcţiei f sunt 0 şi –2.

b) Egalitatea se probează prin inducţie sau cu formula lui Leibniz.

c) $\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}f^{(k)}(0)=\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)k=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{n^2-1}{3n^2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}f^{(k)}(0)=\frac{1}{3}$.

39. *a)* $f''(x)=-\lambda^2\sin\lambda x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x_k=\frac{k\pi}{\lambda}, k\in\mathbb{Z}$ sunt punctele de inflexiune ale funcţiei.

b) Inducţie după n. ***c)*** sau $f^{(n)}(0)=\lambda^n\sin\frac{n\pi}{2}, \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow|f^{(n)}(0)|\le|\lambda|^n\to0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(0)=0$.

40. *a)* $f(n)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}f(k)=1-\frac{1}{n+2}\to 1$. Se obţine $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)\right)^n=\frac{1}{e}$. *b)* $f'(x)=-\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ este singurul punct de extrem local al funcţiei *f* (maxim local).

c) $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{3^{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

41. *a)* $\lim_{x\to\infty}x(f(x)-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$. *b)* $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ şi $f''(x)=\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$.

Singurul punct de inflexiune al funcţiei *f* este $x_0=-\frac{1}{2}$. *c)* Ecuaţia este echivalentă cu $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}-m=0$.

Funcţia $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}-m$ este derivabilă şi $g'(x)=-\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}, \forall x\in\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	$\vert$	
$g(x)$	$-m$	$4e^{-2}-m$	$-m$ $\vert$ $+\infty$	$-m$

Cu şirul lui Rolle, deducem că ecuaţia are exact trei soluţii reale dacă şi numai dacă $m\in(0,4e^{-2})$.

42. *a)* $f'(x)=\frac{x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}, \forall x\in\mathbb{R}^*$. *b)* Funcţia $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-m$ este derivabilă şi $g'(x)=f'(x)=\frac{x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}, \forall x\in\mathbb{R}^*$. Cu ajutorul şirului lui Rolle deducem că ecuaţia are exact două soluţii reale dacă şi numai dacă $m\in(e,\infty)$ (vezi tabelul de mai jos!)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$\vert$	0	
$g(x)$	$-\infty$	$-m$ $\vert$ $+\infty$	$e-m$	$+\infty$

c) $f(x)>0, \forall x>0\Rightarrow a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$ (inducţie) $\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{\frac{1}{a_n}}>1, \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Deci $(a_n)_{n\geq 0}$ are limită. Dacă $l=\lim_{n\to\infty}a_n$, atunci $0<a_n\leq+\infty$. Dacă am avea $l\in(0,\infty)$, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă ar rezulta că $l=ke^{\frac{1}{l}}=1$, ceea ce nu este posibil. Deci $l=+\infty$. Prin urmare, $\lim_{n\to\infty}(f(a_n)-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{a_n}}-1}{\frac{1}{a_n}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

43. *a)* Deoarece $\{x\}=x, \forall x\in(0,1)$, rezultă că $\lim_{x\uparrow 1}f(x)=\lim_{x\uparrow 1}x(1-x)=0$. *b)* Explicitând funcţia *f*, obţinem $f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x\in[0,1)\\(x-1)(2-x), & x\in[1,2)\\(x-2)(3-x), & x\in[2,3]\end{cases}$. Se arată uşor că *f* este continuă pe $[0,3]$. *c)* Cu definiţia, sau folosind corolarul teoremei lui Lagrange, se obţine că *f* nu este derivabilă în $x=1$ şi $x=2$.

44. *a)* Funcţia *f* este derivabilă pe $[-1,1]$ şi $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x), \forall x\in[-1,1]$. Şi funcţia f' este derivabilă pe $[-1,1]$, deci *f* este de două ori derivabilă. Cum $f(0)=0, f'(0)=1$, rezultă că $f\in\mathcal{M}$.

b) Rezultă din $(1+f(x))^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+f(x))}{x}}$ şi $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1+f(x)}=\frac{f'(0)}{1+f(0)}=f'(0)$ (cu regula lui L'Hospital). *c)* Avem $\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\frac{f(x)-x}{x^{n+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}f^{n-k}(x)\cdot x^{k-1}=\frac{f(x)-x}{x^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{n-k}$.

Întrucât $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$ (cu regula lui L'Hospital) şi $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=f'(0)=1$, obţinem $\lim_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\frac{nf''(0)}{2}$.

45. *a)* Dacă $x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]$, atunci $|f(x)|=|x|$. Dacă $x\in[-1,1]\setminus\mathbb{Q}$, atunci $|f(x)|=|x|^3\leq|x|$, întrucât $|x|\cdot(1-|x|^2)\geq 0, \forall x\in[-1,1]$. *b)* Deoarece $0\leq|f(x)|\leq|x|$, prin trecere la limită rezultă că $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, deci *f* este continuă în $x=0$. *c)* Fie $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}, x\neq 0$.

Considerăm şirurile de termen general $x_n=\frac{1}{n}$ şi $y_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$, ambele convergente la 0. Deoarece $\lim_{n\to\infty}g(x_n)=1$ şi $\lim_{n\to\infty}g(y_n)=0$, folosind criteriul cu şiruri pentru limite de funcţii, deducem că *g* nu are limită în $x=0$, ceea ce este echivalent cu faptul că *f* nu are derivată în $x=0$.

46. *a)* $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală. În plus, $\lim_{x\uparrow k}f(x)=-\infty, \lim_{x\downarrow k}f(x)=+\infty$, adică dreapta $x=k$ este asimptotă verticală, $k=\overline{1,n}$. *b)* $f'(x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-k)^2}<0$, deci *f* este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1),(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n),(n,+\infty)$. Întrucât $f((-\infty,1))=(-\infty,0)$, $f((k,k+1))=\mathbb{R}$, pentru orice $k=\overline{1,n-1}$, şi $f((n,+\infty))=(0,+\infty)$, rezultă că ecuaţia $f(x)=a$ are n soluţii dacă $a\neq 0$ şi $n-1$ soluţii dacă $a=0$. *c)* Deoarece $f''(x)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-k)^3}$, rezultă că $f(k+0)=+\infty$ şi $f(k+1-0)=-\infty$, pentru orice $k=\overline{1,n-1}$. Ca urmare, $f''((k,k+1))=\mathbb{R}$ şi, cum f'' este funcţie continuă, ecuaţia $f''(x)=0$ are o soluţie pe fiecare din intervalele $(k,k+1)$, $k=\overline{1,n-1}$. Aşadar *f* are $n-1$ puncte de inflexiune.

47. *a)* $f'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}<0, \forall x>0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare, deci este injectivă. Cum *f* este descrescătoare, are proprietatea lui Darboux. Din $f(0+0)=+\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, rezultă că $\operatorname{Im}f=(0,+\infty)$, deci *f* este surjectivă. *b)* $(f^{-1})'(\ln 2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(\ln 2))}=\frac{1}{f'(1)}=-2$.

c) $f(x)=\ln(x+1)-\ln x, \forall x>0\Rightarrow u_n:=\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\ln(n^2+1)}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(n^2+1)}$, $(\forall)n\geq 1$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x^2+1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x(x+1)}=\frac{1}{2}$.

48. *a)* $f(1+0)=-\infty\Rightarrow x=1$ este asimptotă verticală la dreapta; $\lim_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ este

asimptotă orizontală la graficul lui f spre $+\infty$. *b)* $f'(x)=\dfrac{2}{x(x^2-1)}>0, \forall x>1$.

c) $S_n:=\sum_{k=2}^{n} f(k)=\ln\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\ln\left(\prod_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\dfrac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{2}\right)=\ln\dfrac{n+1}{2n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=-\ln 2$.

49. *a)* $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$, $x\neq 0$; Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,1)$ şi este strict crescătoare pe $(1,\infty)$. *b)* $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, deci f nu admite asimptotă la $+\infty$. Cum $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Deoarece $\lim_{x\uparrow 0} f(x)=-\infty$ şi $\lim_{x\downarrow 0} f(x)=+\infty$, dreapta $x=0$ este asimptotă verticală. *c)* Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există $c_n\in(n,n+1)$ aşa încât $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)=\dfrac{(c_n-1)e^{c_n}}{c_n^2}$ (teorema lui Lagrange). Cum $n<c_n<n+1$, deducem $\dfrac{(n-1)e^n}{(n+1)^2}<\dfrac{(c_n-1)e^{c_n}}{c_n^2}<\dfrac{ne^{n+1}}{n^2}$. Folosind criteriul cleştelui, rezultă că $\lim_{n\to\infty} n^2\left(f(n+1)-f(n)\right)=+\infty$.

50. *a)* f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (operaţii cu funcţii elementare!). Cum $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$, rezultă că f este continuă şi în origine. Prin urmare, f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$. *c)* Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, dacă $x\neq 0$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$, rezultă că există $c_n\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$ aşa încât $f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)f'(c_n)=\dfrac{1}{n(n+1)}f'(c_n)$. Atunci $\lim_{n\to\infty} n^2\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}f'(c_n)=\dfrac{1}{2}$ pentru că $c_n\to 0$ şi $\lim_{n\to\infty} f'(c_n)=\lim_{x\to 0} f'(x)=\dfrac{1}{2}$.

51. *a)* $f(x)=0, \forall x>1\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=0$. *b)* Pe mulţimea $A=\mathbb{R}\setminus\left\{0,1,\dfrac{1}{2},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right\}$, care este reuniunea de intervale deschise, funcţia este nulă şi, prin urmare, continuă şi derivabilă. În punctele $\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, f este discontinuă deoarece limitele laterale sunt nule, iar valoarea funcţiei este $\dfrac{1}{n}$. Studiem continuitatea în punctul $x_0=0$. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $|f(x)|\leq|x|$, de unde rezultă că $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, deci f este continuă în origine. Aşadar, f este continuă pe mulţimea $A\cup\{0\}$.

c) Nefiind continuă cu punctele $\dfrac{1}{n}$, funcţia f nu este derivabilă în aceste puncte. Arătăm că f nu este derivabilă în $x_0=0$. Pentru aceasta considerăm şirurile $u_n=\dfrac{1}{n}\to 0$ şi $v_n=\dfrac{\sqrt{2}}{n}\to 0$. Cum $\dfrac{f(u_n)-f(0)}{u_n-0}=\dfrac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0}=1\to 1$ şi $\dfrac{f(v_n)-f(0)}{u_n-0}=\dfrac{0-0}{u_n-0}=0\to 0$, deducem că f nu este derivabilă în origine. Deci f este derivabilă pe A.

52. *a)* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la graficul lui f spre $\pm\infty$.

b) $f''(x)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right), \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sunt punctele de inflexiune ale funcţiei f.

c) Prin inducţie după n se arată că $f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{-x^2}$, unde $P_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de grad n cu coeficientul dominant $(-1)^n\cdot 2^n$. Prin urmare, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}f^{(n)}(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{x^n}=(-1)^n\cdot 2^n$.

53. *a)* $f(1-0)=-\infty$ şi $f(1+0)=+\infty\Rightarrow x=1$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta. $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=1\Rightarrow y=x+1$ este asimptotă oblică la graficul lui f spre $\pm\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Tabelul de variaţie este:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$++$	$++++$	0	$----$	$---\mid---$	$----$	0	$++++$	$++$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty\mid+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Punctele de extrem local ale funcţiei f sunt 0 (punct de maxim local) şi 2 (punct de minim local).

c) Funcţia $u:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, u(x)=\dfrac{1}{x-1}$ este indefinit derivabilă şi $u^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}, \forall x\neq 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Având în vedere că $f(x)=x+1+u(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, obţinem:
$\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(3)=3+\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}u^{(k)}(3)=3+\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^{k+1}}=3+\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(3)=4$.

54. *a)* $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}, \forall x>0$. Valoarea minimă a funcţiei este 2, şi se atinge în punctul $x=1$.

b) $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$, $\forall x>0\Rightarrow f$ este convexă. *c)* $f(x)>0$, $\forall x>0\Rightarrow a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deoarece $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{a_n}>0, \forall n\in\mathbb{N}$, rezultă şirul este strict crescător, deci are limită. Dacă $l=\lim_{n\to\infty} a_n$, atunci $0<l\leq+\infty$. Nu putem avea $l\in\mathbb{R}_+^*$, pentru că ar rezulta $l=l+\dfrac{1}{l}$, adică $\dfrac{1}{l}=0$, ceea ce nu este posibil. Deci $l=+\infty$ şi atunci $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(a_n)}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n^2}\right)=1$.

55. *a)* $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+4x+3}{x^3+x+1}=1$. *b)* $f'(x)=3x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că f este strict crescătoare, deci este injectivă. Cum f este continuă şi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, rezultă că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci f este surjectivă. În consecinţă, f este bijectivă, deci este inversabilă. *c)* Pentru orice $x>1$ avem $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=x+\sqrt[3]{x}+1>x$ şi $f\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=x-\left(3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-4\sqrt[3]{x}+1\right)<x$. Cum f^{-1} este crescătoare, rezultă $\sqrt[3]{x}-1<f^{-1}(x)<\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}<\dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{x}}<1, \forall x>1$, de unde $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=1$.

56. *a)* $f(x)-x=x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\ln x$, $\forall x>0$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{e^y-1}{y}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\infty$.

b) $f(x)=e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot\left(\dfrac{(x+1)\ln x}{x}\right)'=f(x)\cdot\dfrac{x+1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x+1-\ln x}{x}$, $\forall x>0$.

c) Conform teoremei lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[x,x+1], x>0$, există $c_x\in(x,x+1)$ astfel încât $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)$. Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=1$. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty}c_x=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}f'(c_x)=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=1$.

57. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\cos y}{y}=0\Rightarrow y=x$ este asimptotă oblică la graficul lui f spre $+\infty$.

b) Din teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[x,x+1]$, $x>1$, rezultă existența unui punct $c_x\in(x,x+1)$ astfel încât $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)$. Cum $f'(x)=\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ și $0<\dfrac{1}{x}<1$ pentru $x>1$, rezultă că $0<f'(x)\le1+\dfrac{1}{x}<2$ pentru orice $x>1$, de unde se obține concluzia.

c) Aplicăm din nou teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[n,n+1]$, $n\ge1$; există $d_n\in(n,n+1)$ astfel încât $f(n+1)-f(n)=f'(d_n)$. Cum $d_n\to\infty$, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n))=\lim\limits_{n\to\infty}f'(d_n)=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=1$.

58. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow y=x+\dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică a graficului funcției f spre $+\infty$. Asemănător, dreapta $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică a graficului funcției f spre $-\infty$.

b) Funcția f este derivabilă, bijectivă și $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2+1}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Aplicând teorema de derivare a funcției inverse obținem: $\left(f^{-1}\right)'\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{2}{3}$.

c) Având în vedere că $f(x)>0$, oricare a fi $x>0$, prin inducție obținem $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Din $a_{n+1}-a_n=\operatorname{arctg}a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$, rezultă că șirul $(a_n)_{n\ge0}$ este strict crescător, deci are limită. Fie $l=\lim\limits_{x\to\infty}a_n, 0<l\le+\infty$. Dacă $l\in\mathbb{R}$, prin trecere la limita în relația de recurență obținem $l=l+\operatorname{arctg}l$, adică $l=0$, contradicție. Deci $l=\infty$.

59. *a)* Din relația $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, prin inducție obținem $a_n\in(0,1), \forall n\in\mathbb{N}^*$. *b)* Avem $a_{n+1}-a_n=-a_n^2<0, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(a_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător. *c)* Fiind monoton și mărginit, șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ $(0\le a<1)$. Trecând la limita în relația de recurență rezultă

$a=a-a^2$, deci $a=0$. Cum $a_k^2=a_k-a_{k+1}, \forall k\in\mathbb{N}$, obținem $a_1^2+a_2^2+...a_n^2=a_1-a_{n+1}\to a_1$.

60. *a)* f are proprietatea lui Darboux și $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty\Rightarrow f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\Rightarrow f$ este surjectivă. Cum $f'(x)=3x^2+1>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare, deci este injectivă. Concluzia se obține din faptul că f este bijectivă. *b)* Cu teorema de continuitate a funcției inverse obținem $x_n=f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\to f^{-1}(1)=1$. *c)* Folosind teorema de derivabilitate a funcției inverse avem: $\lim\limits_{n\to\infty}n(u_n-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)-f^{-1}(1)}{\frac{n+1}{n}-1}=\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$.

61. *a)* Deoarece $f'(x)=1+e^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare, deci este injectivă. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ și f are proprietatea lui Darboux, deducem că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci funcția este surjectivă. Funcția f fiind bijectivă, oricare ar fi $n\ge1$, există $x_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_n)=\dfrac{n+1}{n}$.

b) Folosind continuitatea funcției inverse obținem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=f^{-1}(1)=0$. Pentru orice $n\ge1$ avem $nx_n=\dfrac{f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)-f^{-1}(1)}{\frac{n+1}{n}}$. Din teorema de derivare a funcției inverse rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$.

c) Propoziția se rescrie sub forma $e^x-(a-1)x-1\ge0, \forall x\in\mathbb{R}$. Considerând funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x-(a-1)x-1$, avem $g(x)\ge g(0)=0, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde, conform teoremei lui Fermat, rezultă că $g'(0)=0$, adică $a=2$. Pentru $a=2$ obținem $e^x\ge x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, propoziția adevărată.

62. *a)* $x-1\le f(x)\le x+1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$. Cum f are proprietatea lui Darboux, deducem că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Apoi, $f'(x)=1+\cos x\ge0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare. Dacă ar exista $a<b$ astfel încât $f(a)=f(b)$, atunci $f(x)=f(a), \forall x\in[a,b]$, de unde $f'(x)=0, \forall x\in[a,b]$, contradicție. Deci f este strict crescătoare. Concluzia se obține din faptul că f este bijectivă.

b) Din continuitatea funcției inverse, avem $x_n=f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)\to f^{-1}(0)=0$. *c)* Cu teorema de derivare a funcției inverse, obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)-f^{-1}(0)}{\frac{1}{n}-0}=\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$.

63. *a)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=1+\ln e=2$. *b)* Cum $f'(x)=1+\dfrac{1}{x+1}>0, \forall x\ge0$, rezultă că f este strict crescătoare, deci este injectivă. Întrucât f are proprietatea lui Darboux (fiind continuă), $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și f este crescătoare, rezultă că $f([0,\infty))=[0,\infty)$, deci funcția este surjectivă. *c)* Funcția f fiind bijectivă, rezultă că șirul $(a_n)_{n\ge0}$ este bine definit. Demonstrăm prin inducție că $a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. Într-adevăr, din ipoteză avem $a_0>0$, iar dacă $a_n>0$, atunci $a_{n+1}=f^{-1}(a_n)>f^{-1}(0)=0$ (pentru că f^{-1} este strict crescătoare). Din faptul că $a_n-a_{n+1}=\ln(1+a_{n+1})>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, rezultă că $(a_n)_{n\ge0}$ este strict descrescător. Fiind descrescător și

mărginit inferior de 0, şirul este convergent. Dacă $l=\lim_{n\to\infty} a_n\ (0\le l<\infty)$, trecând la limită în relaţia de recurenţă rezultă $l+\ln(1+l)=l$, de unde obţinem $l=0$. Din relaţia $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\ln(1+a_{n+1})}{a_{n+1}}=1+\ln(1+a_{n+1})^{\frac{1}{a_{n+1}}}$ deducem că $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\ln e=2$.

Soluţie alternativă. Cum $a_n\to 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$

64. ***a)*** Imaginea funcţiei $x\to\log_2 x$, $x\in(0,\infty)$ este $\mathbb{R}$, de unde rezultă că $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{Z}$.

b) Avem: $f(x)=k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\left[2^k,2^{k+1}\right)$. Deoarece $f(2^k-0)=k-1$ şi $f(2^k+0)=k$, rezultă că *f* este discontinuă în fiecare punct al mulţimii $\{2^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Din faptul că $f(x)=k,\forall x\in(2^k,2^{k+1})$, rezultă că *f* este continuă pe $(2^k,2^{k+1}),k\in\mathbb{Z}$. Prin urmare, mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei este $(0,\infty)\setminus\{2^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

c) Avem: $\frac{1}{2^n}\le2^k\le1\Leftrightarrow k\in[-n,0]\cap\mathbb{Z}$. Punctele de discontinuitate ale funcţiei *f* din intervalul $\left[\frac{1}{2^n},1\right]$ sunt: $\frac{1}{2^{n-1}},\frac{1}{2^{n-2}},\dots,1$. Rezultă că $\tau_n=\frac{1-(\frac12)^n}{1-\frac12}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\to2$.

65. ***a)*** Cum $n^\alpha\left(f(n+1)-f(n)\right)=\frac{2n^\alpha}{\sqrt{n+1}+\sqrt n}=\frac{2n^{\alpha-\frac12}}{\sqrt{1+\frac1n}+1},\forall n\ge1$, rezultă că limita cerută este egală cu 0 dacă $\alpha<\frac12$, cu 1 dacă $\alpha=\frac12$ şi cu $+\infty$ dacă $\alpha>\frac12$. ***b)*** Funcţia *f* îndeplineşte condiţiile din teorema lui Lagrange pe intervalul $[k,k+1]$, $k\in\mathbb{N}^*$. Atunci există $c_k\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c_k)=\frac{1}{\sqrt{c_k}}$. Cum $c_k\in(k,k+1)$, rezultă $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{c_k}}<\frac{1}{\sqrt k}$, de unde obţinem $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{\sqrt k}$. ***c)*** $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt n\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{c_n}}<0$, $\forall n\ge1$, deci $(x_n)_{n\ge1}$ e strict descrescător. Din ***b)*** rezultă şi $f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n}\left(f(k+1)-f(k)\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt k}$. Prin urmare, $x_n>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt n\right)-2>-2,\forall n\ge1$, deci şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit inferior de -2.

66. ***a)*** Funcţia *f* este derivabilă şi $f'(x)=3(x^2+1)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci *f* este strict crescătoare. Cum *f* este continuă şi $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$, rezultă că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci *f* este surjectivă. Funcţia *f* fiind bijectivă, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$ există un singur număr real $u(\lambda)$, astfel încât $f(u(x))=\lambda$. De aici rezultă că $u=f^{-1}$. ***b)*** Din teorema de derivare a funcţiei inverse rezultă că *u* este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $u'(\lambda)=\frac{1}{f'(u(\lambda))}=\frac{1}{3(u^2(\lambda)+1)},\forall\lambda\in\mathbb{R}$. ***c)*** $\lim_{\lambda\to0}\frac{u(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{u(\lambda)-u(0)}{\lambda-0}=u'(0)=\frac{1}{3(u^2(0)+1)}=\frac13$.

67. ***a)*** Demonstrăm prin inducţie. Conform ipotezei avem $a_1\in(0,1)$. Dacă $a_n\in(0,1)$, din relaţia $a_{n+1}=1-a_n(1-a_n)$, rezultă că $a_{n+1}\in(0,1)$. Deci $a_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. ***b)*** $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$, $\forall n\ge1$, deci $(a_n)_{n\ge1}$ este strict crescător. ***c)*** Fiind monoton şi mărginit, şirul este convergent. Dacă $l=\lim_{n\to\infty}a_m$, trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem $l=l^2-l+1$, adică $(l-1)^2=0$, deci $l=1$. Din relaţia $a_n=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ obţinem $a_1,a_2,\dots,a_n=\frac{1-a_2}{1-a_1}\cdot\frac{1-a_3}{1-a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_1}$, de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty}(a_1,a_2,\dots,a_n)=0$.

68. ***a)*** În orice punct $x_0\in\mathbb{R}^*$ avem $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, deci *f* este continuă pe $\mathbb{R}^*$. Cum $|f(x)|=|x|\cdot\left|\sin\frac1x\right|\le|x|$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$, rezultă că $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, deci *f* este continuă şi în origine. ***b)*** $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac1x,\forall x\in\mathbb{R}^*$. Cum funcţia $x\to\sin\frac1x$, $x\in\mathbb{R}^*$ nu are limita în $x_0=0$, rezultă că *f* nu este derivabilă în acest punct (nu are nici măcar derivată).
c) $|f(x)|\le|x|,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow|x_{n+1}|=|f(x_n)|\le|x_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow(|x_n|)_{n\ge0}$ este descrescător. Fiind mărginit inferior de 0, şirul este convergent. Fie $l=\lim_{n\to\infty}|x_n|$. Întrucât *f* este continuă şi $f(|x|)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(|x_n|)=f(l)$.

69. ***a)*** $f'(x)=-e^{-x}+2nx-2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f_n''(x)=e^{-x}+2n>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f_n$ este convexă.
b) Arătăm că ecuaţia $f_n(n)=0$ are cel mult două soluţii reale şi distincte. Într-adevăr, dacă ecuaţia are trei soluţii reale $a<b<c$, aplicând teorema lui Rolle funcţiei f_n pe fiecare dintre intervalele $[a,b]$ şi $[b,c]$, ar rezulta că există $\alpha\in(a,b)$ şi $\beta\in(b,c)$ astfel încât $f_n'(\alpha)=f_n'(\beta)=0$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei f_n' pe intervalul $[\alpha,\beta]$, obţinem că există $\gamma\in(\alpha,\beta)$ astfel încât $f_n''(\gamma)=0$, adică $e^{-\gamma}+2n=0$, contradicţie. Se observă că 0 este soluţie a ecuaţiei. Cum $f_n\left(\frac1n\right)=\left(e^{-\frac1n}-1\right)-\frac1n<0$ şi $f_n\left(\frac{1+\sqrt{1+n}}{n}\right)=e^{-\frac{1+\sqrt{1+n}}{n}}>0$, continuitatea funcţiei f_n implică faptul că pentru fiecare $n\ge1$ există $x_n\in\left(\frac1n,\frac{1+\sqrt{1+n}}{n}\right)$ astfel încât $f_n(x_n)=0$. ***c)*** Din $f(x_n)=0$ obţinem $nx_n=2+\frac{e^{-x_n}-1}{-x_n}$. Întrucât $x_n\to0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}nx_n=3$.

70. ***a)*** $f'(x)=nx^{n-1}+\frac1x>0$, $\forall x>0\Rightarrow f_n$ este strict crescătoare $\Rightarrow f_n$ este injectivă. Întrucât $f_n(0+0)=-\infty,\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ şi *f* este continuă, rezultă că $f((0,\infty))=\mathbb{R}$, deci *f* este surjectivă. Funcţia f_n fiind bijectivă, există un singur număr real $x_n>0$ astfel încât $f_n(x_n)=0$. Cum $f_n(0+0)=-\infty$ şi $f_n(1)=1$, deducem că $x_n\in(0,1)$. ***b)*** Dacă ar exista $n\ge1$ astfel încât $x_n\ge x_{n+1}$, atunci $0=x_n^n+\ln x_n\ge x_n^n+\ln x_{n+1}\ge x_{n+1}^n+\ln x_{n+1}>x_{n+1}^{n+1}+\ln x_{n+1}=0$, absurd. Deci $x_n\le x_{n+1}$, $\forall n\ge1$.
c) Fiind monoton şi mărginit, şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent. Fie $\lambda=\lim_{n\to\infty}x_n$. Din cele de mai sus deducem că $\lambda\in(0,1]$. Presupunând $0<\lambda<1$, deoarece $x_n<\lambda$, rezultă că $x_n^n<\lambda^n$ şi $\ln x_n<\ln\lambda$, deci $0=x_n^n+\ln x_n<\lambda^n+\ln\lambda$, de unde $\ln\lambda=\lim_{n\to\infty}\left(\lambda^n+\ln\lambda\right)\ge0$, adică $\lambda\ge1$, absurd. Deci $\lim_{n\to\infty}x_n=1$.

Tema 3.2. Primitive.

1. *a)* $F'(x)=(2x+1)e^{2x}-2(x^2+x+1)e^{2x}=f(x)$.

b) Cum $F'(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $F''(x)=(-4x)e^{-2x}-2(-2x^2-1)e^{-2x}=(4x^2-4x+2)e^{-2x}>0$, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. *a)* $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\sqrt{x}\frac{1}{x}=f(x),\ \forall x\in(0,+\infty)$.

b) Fie G o primitivă oarecare a lui f. Deci $G'(x)=f(x)>0,\ \forall x\in(1,+\infty)\Rightarrow G$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

3. *a)* Se verifică că $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Fie G o primitivă oarecare a lui f. $G'(x)=\frac{1}{x^2+x+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow G$ este crescătoare.

c) Fie G o primitivă oarecare a lui f, din *b)* g este strict crescătoare, deci este injectivă.

$G(x)=F(x)+a$, deci $\operatorname{Im}G=\left[-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+a,\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+a\right]$, deci G nu este surjectivă.

d) $F''(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ punct de inflexiune.

4. $F'(x)=e^x(x^2+3x+a)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta=9-4a\le 0\Rightarrow a\in\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{e(4+a)}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{2e}-4$.

c) Ecuația $F''(x)=0$ are două soluții distincte, deci

$x^2+5x+a+3=0\Rightarrow\Delta=13-4a>0\Rightarrow a\in\left(-\infty,\frac{13}{4}\right)$.

5. *a)*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=a=1$

b) $F'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a>0$ și $\Delta=16-4a^2\le 0$. Deci $a\in[2,+\infty)$

c) $F''(x)=f'(x)=e^{-x}(-ax^2+2x(a-2)+4-a)$ cu $\Delta=16>0$.

6. $F'(x)=3^{-x}(a-ax\ln 3-b\ln 3)=x3^{-x}\Rightarrow a=-\frac{1}{\ln 3},\ b=\frac{a}{\ln 3}=-\frac{1}{\ln^2 3}$.

7. $F'(x)=a\sqrt{3x+1}+(ax+b)\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}\Rightarrow 9ax+3b+2a=6x+2\Rightarrow a=\frac{2}{3},\ b=\frac{2}{9}$.

8. *a)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $F'(x)=f(x)=x\sqrt{x+1}$, deci f e strict descrescătoare pe $(-1,0]$ și strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) $F'(x)=f(x)=(2ax+b)\sqrt{x+1}+\frac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{x+1}}=x\sqrt{x+1}\Rightarrow$

$5ax^2+(4a+3b)x+2b+c=2x^2+2x\Rightarrow a=\frac{2}{5},\ b=\frac{2}{15},\ c=\frac{-4}{15}$.

9. *a)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=f(1)=0$. *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x=+\infty$. *c)*

$F'(x)=a\ln^2 x+(b+2a)\ln x+b+c=\ln^2 x\Rightarrow a=1,\ b=-2,\ c=2$.

10. $F'(x)=2ax\cos x-\sin x(ax^2+b)+c(\sin x+x\cos x)=x^2\sin x\Rightarrow a=-1, b=c, 2a+c=0$, deci $b=c=2$.

11. Funcția admite primitive și cum nu poate avea discontinuități de speța I, ea trebuie să fie continuă, deci $f_s(0)=f(0)=f_d(0)\Rightarrow a=b=1$.

12. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Trebuie arătat că f este continuă într-un punct oarecare $n\in\mathbb{Z}$.

$f_s(n)=\lim\limits_{x\nearrow n}(x-(n-1))(1-[x-(n-1)])=0;\quad f_d(n)=\lim\limits_{x\searrow n}(x-n)(1-(x-n))=0;\quad f(n)=0$,

de unde rezultă continuitatea lui f, deci f admite primitive.

13. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Arătăm că f este continuă într-un punct oarecare $n\in\mathbb{Z}$.

$f_s(n)=\lim\limits_{x\nearrow n}(x-(n-1))\cos\frac{(1+2x)\pi}{2}=0;$

$f_d(n)=\lim\limits_{x\searrow n}(x-n)\cos\frac{(1+2x)\pi}{2}=0;\quad f(n)=0$, de unde rezultă continuitatea lui f.

14. Dacă F este primitiva unei alte funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, rezultă că F este funcție derivabilă. F este continuă pe $\mathbb{R}$. $F'(x)=\begin{cases}4x^3+1 \text{ pentru } x<0\\ \frac{2x}{x^2+1}+a \text{ pentru } x>0\end{cases}$, deci $a=1$.

15. Dacă G este primitiva unei alte funcții $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, rezultă că G este funcție derivabilă. Din continuitatea în $x_0=1$ găsim $b=1$, iar din derivabilitatea în $x_0=1$ găsim $a=0$.

16. Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Din continuitatea în $x_0=0$ găsim $a=c=0$, iar din derivabilitatea în $x_0=0$ găsim $b=1$.

17. F este funcție derivabilă. $F_s(1)=a+b=F_d(1)=1$. $F'_s(1)=a=F_d'(1)=0\Rightarrow b=1$.

18. $f_s(0)=0=f_d(0)=b$ și $f'_s(0)=a-1=f_d(0)=1\Rightarrow a=2$.

19. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{\alpha}\ln x=0$ pentru $\alpha\in(0,+\infty)$, deci funcția f admite primitive pentru $\alpha\in(0,+\infty)$.

20. *a)* $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x\ne 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$ admite primitive pentru $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

b) Pentru $f(0)=1$ funcția admite primitive (pentru că este continuă) și $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (pentru că x și arctg$x$ au același semn).

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

21. a) f este continuă pe $(0,+\infty)$ și pe $(-\infty,0]$; $f_s(0)=f(0)=0$, iar $f_d(0)=\lim_{x\searrow0}(x\ln x+\sin x)=0$. Deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (funcție elementară) și $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0)$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

c) f este continuă pe $(0,+\infty)$ și pe $(-\infty,0]$; $f_s(0)=f(0)=0=f_d(0)$. Deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

22. Fiecare dintre funcțiile are câte un puncte de discontinuitate de speța a I-a, deci nu admite primitive.

a) $f_s(0)=0\neq f_d(0)=1$, deci $x_0=0$ este punct de discontinuitate de speța a I-a.

Pentru b) $x_0=2$ și pentru c) $x_0=0$ sunt puncte de discontinuitate de speța a I-a.

23. a) $\int(f(x)+f'(x))e^x dx=e^x\cdot f(x)+C$.

b) $\int\left(f'(x)\cdot\operatorname{arctg}x+\frac{f(x)}{x^2+1}\right)dx=f(x)\cdot\operatorname{arctg}x+C$.

c) $\int\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx=\int\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}dx=\frac{f(x)}{e^x}+C$.

d) $\int(\sin x\cdot f'(x)+\cos x\cdot f(x))dx=f(x)\cdot\sin x+C$.

e) $\int(\sin x\cdot f(x)-\cos x\cdot f'(x))dx=-f(x)\cdot\cos x+C$.

f) $\int\frac{e^xf(x)-e^xf'(x)}{f^2(x)}dx=\frac{e^x}{f(x)}+C$.

g) $\int(f'(x)f^2(x))dx=\frac{1}{3}f^3(x)+C$.

24. a) $\int(f''(x)+f'(x))e^x dx=e^x\cdot f'(x)+C$.

b) $\int(-f'(-x)+f(-x))e^x dx=e^xf(-x)+C$.

c) $\int\frac{f''(x)-f'(x)}{e^x}dx=\int\frac{e^xf''(x)-e^xf'(x)}{e^{2x}}dx=\frac{f'(x)}{e^x}+C$.

d) $\int\left((f')^2(x)+f(x)f''(x)\right)dx=f'(x)f(x)+C$.

e) $\int\frac{f''(x)f(x)-(f')^2(x)}{f^2(x)}dx=\frac{f'(x)}{f(x)}+C$.

25. a) $\int f_1(x)dx=\int\frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$,

$\int f_3(x)dx=\int\frac{x^3}{x^2+4}dx=\int\left(x-\frac{4x}{x^2+4}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2\ln(x^2+4)+C$.

b) Fie F_4 o primitivă a lui f_4; $F_4'(x)=\frac{x^4}{x^2+4}\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci F_4 este injectivă.

$f_4(x)=\frac{x^4}{x^2+4}=x^2-4+\frac{16}{x^2+4}\Rightarrow F_4(x)=\frac{x^3}{3}-4x+8\operatorname{arctg}x+c,\ c\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty}F_4(x)=+\infty$ și $\lim_{x\to-\infty}F_4(x)=-\infty$ și cum $F_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă, rezultă surjectivitatea.

c) Fie F o primitivă oarecare a lui f_n. Dacă n este număr par $F'(x)=f_n(x)\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este injectivă.

Dacă n este impar $F'(x)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)$ și $F'(x)<0,\ \forall x\in(-\infty,0)$, deci F nu este injectivă.

26. a) Fie F o primitivă oarecare a lui f_1. $F'(x)=f_1(x)\Rightarrow F''(x)=\ln x+1\geq0,\ \forall x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow F$ este convexă pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

b) $\int\frac{\ln x}{f_n(x)}dx=\int\frac{1}{x^n}dx=\frac{x^{1-n}}{1-n}+C$.

27. a) $\int f_1(x)dx=\int\frac{x}{x+3}dx=\int\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=x-3\ln(x+3)+C$.

$\int f_2(x)dx=\int\frac{x^2}{x+3}dx=\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx=\frac{x^2}{2}-3x+9\ln(x+3)+C$.

b) Fie F_4 o primitivă a lui f_4; $F_4'(x)=\frac{x^4}{x+3}\geq0,\ \forall x\in(-3,+\infty)$, deci F_4 este crescătoare.

c) Fie F_n o primitivă a lui f_n;

$F_n'(x)=x^{n-1}\frac{x}{x+3}<0,\ \forall x\in(-3,0)\Rightarrow x^{n-1}>0\ \forall x\in(-3,0)\Rightarrow n$ este număr impar.

28. a) $\int f_0(x)dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$;

$\int(f_0(x)-f_1(x))dx=\int\frac{1-x}{e^x}dx=\int\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}dx=\frac{x}{e^x}+C$.

b) $F_0(x)=-\frac{1}{e^x}+C\Rightarrow F_0(0)=C-1=0\Rightarrow C=1$, deci $F_0(1)=1-\frac{1}{e}$.

c) Fie F o primitivă oarecare a funcției $f_{2012}\Rightarrow F''(x)=f'_{2012}(x)=\frac{x^{2011}(2012-x)}{e^x}<0\ \forall x\in(-\infty,0)$, deci F este concavă pe intervalul $(-\infty,0)$.

d) Fie G o primitivă oarecare a funcției $f_n\Rightarrow G''(x)=f'_n(x)=\frac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}>0\ \forall x\in(-\infty,0)\Rightarrow n$ este număr par.

Tema 3.3. Funcţii integrabile

1. *a)* $\int_0^1 (x^2+1)^2 dx = \int_0^1 (x^4+2x^2+1)dx = \frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1=\frac{28}{15}$.

b) $\int_0^2 (x-\sqrt{x})^2 dx = \int_0^2 (x^2-2x\sqrt{x}+x)dx = \frac{14}{3}-\frac{16}{5}\sqrt{2}$.

c) $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}dx = \frac{5}{2}+\ln 2$.

d) $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^2 \left(x^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{21}{5}2^{\frac{2}{3}}-\frac{99}{40}$.

e) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{29}{6}$.

f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = 2\sqrt{x+2}\Big|_0^1 = 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

g) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{3x+1}}dx = \frac{1}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. *a)* $\int_0^1 (x-e^x)dx = \frac{1}{2}-(e-1)=\frac{3}{2}-e$.

b) $\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x}-e^x\right)^2 dx = \int_0^1 \left(e^{-2x}-2+e^{2x}\right)dx = \left(-\frac{e^{-2x}}{2}-2x+\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2-e^{-2}}{2}-2$.

c) $\int_0^1 \left(2^x+3^{-x}\right)dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{3\ln 3}$.

d) $\int_{-1}^1 \left(2^x-2^{-x}\right)dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{-1}^1 = 0$.

e) $\int_0^4 \left(\sqrt{2}^x-\frac{2}{\sqrt{3}^x}\right)dx = \left(\frac{\sqrt{2}^x}{\ln\sqrt{2}}+2\frac{\sqrt{3}^{-x}}{\ln\sqrt{3}}\right)\Big|_0^4 = \frac{6}{\ln 2}+\frac{4\left(\frac{1}{9}-1\right)}{\ln 3}$.

3. *a)* $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}\ln 3$.

c) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 + \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$.

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+x+2}{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2\operatorname{arctg} x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = 1+\frac{\pi}{6}$.

e) $\int_2^3 \frac{x^3-x+2}{x^2-1}dx = \int_2^3 \left(x+\frac{2}{x^2-1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_2^3 = \frac{5}{4}+\ln\frac{3}{2}$.

f) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

g) $\int_0^1 \frac{x^2}{3x^2+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{3x^2+1}\right)dx = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}\pi}{27}$.

4. *a)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

c) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

d) $\int_2^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \int_2^3 \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}dx =$

$\sqrt{x^2-1}\Big|_2^3 + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big|_2^3 = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\ln\frac{3+\sqrt{8}}{2+\sqrt{3}}$.

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{3}$.

g) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\Big|_{-1}^1 = 0$.

5. *a)* $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$.

b) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx = \ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}$.

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -1+\sqrt{3}$.

f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6. a) $\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^2 (1-x)dx = 1$.

b) $\int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx = 2$.

c) $\int_0^2 x[x]dx = \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}$.

d) $\int_{-1}^1 x\{x\}dx = \int_{-1}^0 x(x+1)dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}$.

e) $\int_{-1}^1 |x-\sin x|\,dx = \int_{-1}^0 (\sin x - x)dx + \int_0^1 (x-\sin x)dx = 2\cos 1 - 1$; altfel

$\int_{-1}^1 |x-\sin x|\,dx = 2\int_0^1 (x-\sin x)dx = 2\cos 1 - 1$.

f) $\int_{-1}^1 |x-\operatorname{arctg} x|\,dx = 2\int_0^1 (x-\operatorname{arctg} x)dx = 1-2\left(x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\right) = 1-\frac{\pi}{2}+\ln 2$.

7. a) $\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi$.

b) $\int_0^\pi x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = -2$.

c) $\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$.

d) $\int_0^1 x^2 e^{-x}dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\left(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx\right) = 2-\frac{5}{e}$.

■ M. ANDRONACHE • D. ŞERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

e) $\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = 1$.

f) $\int_1^e \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e-2$.

g) $\int_e^{e^2} x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_e^{e^2} - \frac{1}{3}\int_e^{e^2} x^2 dx = \frac{5e^6-2e^3}{9}$.

h) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x}\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = 16-2\sqrt{e}$.

i) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}+\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}$

8. a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx = -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 1$.

b) $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\cos x^3 dx = \frac{1}{3}\sin x^3\Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}} = 0$.

c) $\int_1^e \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\Big|_1^e = 2\left(e^{\sqrt{e}}-e\right)$.

d) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

e) $\int_1^e \frac{\ln^{2012} x}{x}dx = \frac{1}{2013}\ln^{2013} x\Big|_1^e = \frac{1}{2013}$.

f) $\int_0^\pi \cos x\cdot\sin(\sin x)dx = -\cos(\sin x)\Big|_0^\pi = 0$.

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\ln(1+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

9. a) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx \overset{x+1=t}{=} \int_1^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx \overset{e^x=t}{=} \int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt = 1+\ln\frac{2}{e+1}$.

10. a) $F'(x) = \frac{-x\sin x-\cos x}{x^2} = f(x),\ \forall x\in(0,+\infty)$.

b) $\int_\pi^{2\pi} f(x)dx = F(x)\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{3}{2\pi}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{n\pi} f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos n\pi}{n\pi}-\frac{\cos\pi}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}$.

11. *a)* $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+\cos x+C$.

b) Aria este egală cu $\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\frac{\pi^2}{2}-2$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+\cos x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$.

12. *a)* $F'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}=-2\frac{x}{x^4+2x^2+2}=-2f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{2}F(x)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\left(\text{arctg}\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)dt=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}\left(F(n)-F(0)\right)=\frac{\pi}{8}$.

13. *a)* $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$.

b) Aria cerută este egală cu $\int_0^1|g(x)|dx=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt=\frac{1}{2}\left(e^t t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)=\frac{1}{2}$.

c) $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<\int_0^1 e^x dx=e-1<2$.

14. *a)* $f'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}e^x$.

b) Cum $\frac{t^2}{t^2+1}e^t\geq 0,\ t\in\mathbb{R}\Rightarrow\int_0^x\frac{t^2}{t^2+1}e^t dt\geq 0,\ \forall x\in(0,+\infty)$..

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{t^2}{t^2+1}e^t dt\geq\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{t^2}{t^2+1}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\text{arctg}\,x)=+\infty$.

15. *a)* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

b) $f(-x)=\int_x^{-x}\frac{t^{2012}}{t^2+1}dt=-f(x)$.

c) Pentru $x\geq 0$ $\int_{-x}^{x}\frac{t^{2012}}{t^2+1}dt\geq 0$, iar pentru $x\leq 0$ notăm $x=-y,\ y\geq 0$ şi $f(x)=-f(y)\leq 0,\ y\geq 0$.

16. *a)* $f'(x)=\left(x^4-4x+3\right)\sqrt{x^4+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=3$.

c) $f'(x)=\left(x^4-4x+3\right)\sqrt{x^4+1}=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)\sqrt{x^4+1}\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f nu are puncte de extrem.

17. *a)* Aria cerută este egală cu $\int_0^1|f(x)|dx=\text{arctg}\,x\,|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) Funcţia este strict crescătoare, deci există limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t^2)dt$. Avem

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t^2)dt=\int_0^1 f(t^2)dt+\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f(t^2)dt\leq\int_0^1 f(t^2)dt+\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)dt=$
$\int_0^1 f(t^2)dt+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\text{arctg}\,x-\frac{\pi}{4}\right)\in\mathbb{R}$.

c) $I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}f(x)dx\overset{x=-t}{=}-\int_{1}^{-1}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}f(-t)dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}f(t)dt$.

Deci $2I=\int_{-1}^{1}\frac{1+e^x}{1+e^x}f(x)dx=2\text{arctg}\,x\,|_{-1}^{1}=\pi$.

18. *a)* $\int_0^1\left(t^3+1\right)f(t)dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$.

b) $\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(t)dt\overset{t=\frac{1}{y}}{=}\int_x^1 f\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_1^x y^3f(y)dy,\ \forall x>0$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(t)dt+\int_1^x f(t)dt\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_1^x t^3f(t)dt+\int_1^x f(t)dt\right)=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\text{arctg}\,x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

19. *a)* $f'(x)=2x\sqrt{x^8+1}$.

b) $f'(x)=2x\sqrt{x^8+1}=0\Rightarrow x=0$ este punct de extrem.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geq\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{x^2}t^2dt=+\infty$, deci graficul funcţiei f nu are asimptote orizontale la $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x\sqrt{x^8+1}=+\infty$, deci graficul funcţiei f nu are asimptote oblice la $+\infty$.

20. *a)* $\lim_{x\searrow 1}\frac{\int_1^{x^2}\arcsin\frac{t^2}{t^2+1}dt}{x-1}=\lim_{x\searrow 1}2x\arcsin\frac{x^4}{x^4+1}=\frac{\pi}{3}$.

b) $f'(x)=2x\arcsin\frac{x^4}{x^4+1}>0,\ \forall x\ge 1$, deci *f* este strict crescătoare.

c) Funcţia *f* este continuă, deci nu are asimptote verticale.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)\ge\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^2}\arcsin\frac{1}{2}dt=+\infty$, deci graficul funcţiei *f* nu are asimptote orizontale la $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x\arcsin\frac{x^4}{x^4+1}=+\infty$, deci graficul funcţiei *f* nu are asimptote oblice la $+\infty$.

21. *a)* $\int_0^{\pi}x^2f(x)dx=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=-x\cos x\big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi$.

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$, deci *f* este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$.

c) $\int_1^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\cos 1$.

22. *a)* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}e^{-x^4}=1$.

b) $f'(x)=e^{-x^4}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este funcţie strict crescătoare, deci este injectivă.

c) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^1e^{-t^4}dt+\int_1^xe^{-t^4}dt\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^1e^{-t^4}dt+\int_1^xe^{-t}dt\right)=\int_0^1e^{-t^4}dt+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}-e^{-x}\right)\in\mathbb{R}$

şi cum funcţia *f* este strict crescătoare rezultă că $\operatorname{Im}f\ne\mathbb{R}$, deci funcţia *f* **nu** este surjectivă.

23. *a)* Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x-1;\ f'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x_0=0$ este punct de extrem. Din tabelul de variaţie deducem că $x_0=0$ este punct de minim pentru *f*, deci $f(x)\ge f(0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $I_1=\int_0^1e^{-x^2}dx\ge\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}>\frac{1}{e}$.

Dar $e^{x^2}\ge 1+x^2\Rightarrow\frac{1}{e^{x^2}}\le\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\int_0^1e^{-x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$.

c) $I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx>0\Rightarrow$ şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este monoton crescător. Este suficient să arătăm mărginirea superioară.

$I_n=\int_0^ne^{-x^2}dx=\int_0^1e^{-x^2}dx+\int_1^ne^{-x^2}dx\le\int_0^1e^{-x^2}dx+\int_1^ne^{-x}dx=\int_0^1e^{-x^2}dx+\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}\right)\le\frac{1}{e}+\frac{\pi}{4}$.

24. *a)* $I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+2012}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2012\right)\big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{2013}{2012}$.

b) $I_{n+2}+2012\cdot I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+2012x^n}{x^2+2012}dx=\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) $0\le\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2012}dx\le\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

d) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}-x^n}{x^2+2012}dx\le 0\Rightarrow$ şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător.

e) $I_{n+2}+2012\cdot I_n=\frac{1}{n+1}\le I_n+2012I_n\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{2013(n+1)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+2012\cdot I_n\ge I_{n+2}+2012I_{n+2}\Rightarrow I_{n+2}\le\frac{1}{2013(n+1)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Deci $\frac{1}{2013(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2013(n-1)}\Rightarrow\frac{n}{2013(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{2013(n-1)}\Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{2013}$.

25. *a)* $I_0=\int_1^2\ln\left(x^2+1\right)dx=x\ln\left(x^2+1\right)\big|_1^2-2\int_1^2\frac{x^2}{1+x^2}dx=2\ln 5-\ln 2-2(x-\operatorname{arctg}x)\big|_1^2=$

$\ln\frac{25}{2}-1+2\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_1^2\left[(1-x)^{2n+2}-(1-x)^{2n}\right]\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_1^2(1-x)^{2n}(x^2-2x)\ln\left(x^2+1\right)dx\le 0$, deci

şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător şi cum şirul este mărginit inferior de 0, el este convergent.

c) $0\le\int_1^2(1-x)^{2n}\ln\left(x^2+1\right)dx\le\ln 5\int_1^2(1-x)^{2n}dx=-\ln 5\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_1^2=\frac{\ln 5}{2n+1}$ şi prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

26. *a)* $\int_0^1(1-x)^4dx=-\frac{(1-x)^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}$.

b) $0\le\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(1-x)^{2n}dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$.

c) $I_n=C_{2n}^0-\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{3}C_{2n}^2-\ldots+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}=\int_0^1(1-x)^{2n}dx\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

27. *a)* $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\int_0^1f(x)dx=F(x)\big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$, deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

28. *a)* $\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1}\frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2} = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n^2+2\cdot n+1^2}+\frac{n}{n^2+2\cdot 2n+2^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2+2\cdot n^2+n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{2n^2+2nk+k^2} =$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 f(x)dx = \operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}$.

29. *a)* $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

b) $V = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx = \frac{2\pi}{3}$.

c) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

30. *a)* $I_1 = \int_0^2\left(2x-x^2\right)dx = \frac{4}{3}$.

b) $I_n = \int_0^2\left(2x-x^2\right)^n dx \overset{x-1=t}{=} \int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt = t\left(1-t^2\right)^n\Big|_{-1}^{1} + 2n\int_{-1}^{1}t^2\left(1-t^2\right)^{n-1}dt =$

$-2n\int_{-1}^{1}\left(1-t^2-1\right)\left(1-t^2\right)^{n-1}dt = -2nI_n+2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

c)

$0\leq I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}I_1 =$

$\frac{\sqrt{2n}\cdot\sqrt{2n}\cdot\sqrt{2n-2}\cdot\sqrt{2n-2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5}I_1 \leq \frac{\sqrt{2n}\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 5\sqrt{4}}{(2n+1)\cdot(2n-1)\ldots\cdot 5}I_1 =$

$\frac{\sqrt{2n}}{2n+1}2I_1$. În concluzie am obţinut $0\leq I_n\leq\frac{2\sqrt{2n}}{2n+1}I_1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}I_n = 0$.

31. *a)* $I_2 = \int_0^1\left(x-x^2\right)dx = \frac{1}{6}$.

b) $I_n \overset{x-\frac{1}{2}=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^n dx = t\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^n\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}t^2\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^{n-1}dx =$

$-2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-t^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^{n-1}dx = -2nI_n+\frac{n}{2}I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n}{4n+2}I_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

c) Aplicăm criteriul raportului $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{1}{4}\in[0,1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}I_n = 0$.

Altfel $0\leq I_n = \frac{n}{4n+2}I_{n-1}\leq\frac{1}{4}I_{n-1}\leq\frac{1}{4^2}I_{n-2}\leq\ldots\leq\frac{1}{4^{n-2}}I_1$ şi prin trecere la limită în inegalităţi obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n = 0$.

32. *a)* $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4\left(x-3\sqrt{x}+2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}-2x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\Big|_1^4 = -\frac{1}{2}$.

b) Aria cerută este egală cu

$\int_1^2|g(x)|dx = -\int_1^2\frac{x^2-3x+2}{x}dx = \left(-\frac{x^2}{2}+3x-2\ln(x)\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}-2\ln 2$.

b) $\int_1^2 f^n(x)dx = \int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^n dx = \frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'\left(x^2-3x+2\right)^n dx =$

$\frac{1}{2}(2x-3)'\left(x^2-3x+2\right)^n\Big|_1^2 - \frac{n}{2}\int_1^2(2x-3)^2 f^{n-1}(x)dx =$

$-\frac{n}{2}\int_1^2\left(4x^2-12x+9\right)f^{n-1}(x)dx = -\frac{n}{2}\int_1^2\left(4\left(x^2-3x+2\right)+1\right)f^{n-1}(x)dx =$

$-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx - \frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$, de unde rezultă cerinţa.

33. *a)* $\int_0^1\frac{x^{2011}}{x^{2012}+1}dx = \frac{1}{2012}\ln 2$.

b) $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{x^{2012}+1}dx \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{2}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)} = 0$.

c) Funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x) = \int_1^x f(t)dt$ este strict crescătoare, deci există limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)dt$.

Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)dt \leq \lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^2+1}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

34. ***a)*** f este continuă pe $[0,1]$, pe $(1,2]$ şi $f(1)=f_s(1)=1\neq f_d(1)=2$, deci f este integrabilă pe $[0,2]$, dar nu admite primitive (pentru că are un punct de discontinuitate de speţa a 1-a.

b) Aria este egală cu $\int_0^2 |f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2\left(x+e^x\right)dx=2+e^2-e.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_1^2 f^n(x)dx}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_1^2\left(x+e^x\right)^n dx}{n}\geq\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_1^2 (x+1)^n dx}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{3^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+1}}{n+1}}{n}=+\infty$.

35. $g'(x)=f(x)-f(1006)>0,\ \forall x>1006$ şi $g'(x)<0,\ \forall x<1006$, deci funcţia g este strict descrescătoare pe $(0,1006)$ şi strict crescătoare pe $(1006,2012)$, deci nu este injectivă

36. ***a)*** $I_2=\int_1^2\dfrac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}2-\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_1^2\dfrac{1}{x^{n+1}+1}dx-\int_1^2\dfrac{1}{x^n+1}dx\leq 0$, de unde concluzia.

c) Şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este descrescător şi mărginit inferior de 0, deci este convergent.

d) $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2\dfrac{1}{x^n+1}dx\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2\dfrac{1}{x^n}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{-n+1}\left(2^{-n+1}-1\right)=0$.

37. ***a)*** $I_1+I_2+I_3=\int_0^1\dfrac{x^1+x^2+x^3}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+1}-x^n}{x^2+x+1}dx\leq0\Rightarrow$ şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este descrescător.

c) $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+x+1}dx\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.

38. ***a)*** $I_3=\int_0^1\dfrac{t^3}{t^2+1}dt=\int_0^1\left(t-\dfrac{t}{t^2+1}\right)dt=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2$.

b) $I_{2n}+I_{2n-2}=\int_0^1 t^{2n-2}dt=\dfrac{1}{2n-1},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq2$.

c) $I_0+I_2+\ldots+I_{2012}=I_0+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2011}=\dfrac{\pi}{4}+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2011}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

d) $0\leq I_n=\int_0^1\dfrac{t^n}{t^2+1}dt\leq\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

e) $I_{2n}=\dfrac{1}{2n-1}-I_{2n-2}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{1}{2n-5}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{1}+(-1)^n I_0\Rightarrow$

$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}=I_0+(-1)^{n-1}I_{2n}\Rightarrow$

M. ANDRONACHE • D. ŞERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

39. ***a)*** $I_0=\int_0^1\dfrac{1-x}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\,\big|_0^1-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln2}{2}$.

b) $I_2-I_0=\int_0^1\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2-1}{x^2+1}dx=\int_0^1\dfrac{\left(x^2+1\right)^2+2x\left(x^2+1\right)+x^2+1-2}{x^2+1}dx=$

$\left(\dfrac{x^3}{3}+x+x^2+x-2\operatorname{arctg}x\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{3}+3-\dfrac{\pi}{2}\notin\mathbb{Q}$.

c) Arătăm că polinomul $g=\left(X^2+X+1\right)^{4n+1}-X$ se divide cu X^2+1. $g(i)=\left(i^2+i+1\right)^{4n+1}-i=i^{4n+1}-i=0$, deci există $q\in\mathbb{Q}[X]$ astfel încât $g=q\cdot\left(X^2+1\right)\Rightarrow I_{4n+1}=\int_0^1\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^{4n+1}-x}{x^2+1}dx=\int_0^1 q(x)dx\in\mathbb{Q}$.

40. ***a)*** $I_n=2-\ln\dfrac{n+1}{n}\Rightarrow I_{n+1}-I_n=\ln\dfrac{n+1}{n}-\ln\dfrac{n+2}{n+1}=\ln\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>0$.

b) $I_n=2-\ln\dfrac{n+1}{n}<2,\ I_n=\int_n^{n+1}\dfrac{2x-1}{x}dx>0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(2-I_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\ln\dfrac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1$.

41. ***a)*** $I_1=\int_1^2\dfrac{x}{x+1}dx=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=1-\ln\dfrac{3}{2}$.

b) $I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{x^n+1}dx\leq\int_1^2\dfrac{x^n+1}{x^n+1}dx=1$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2\dfrac{x^n+1-1}{x^n+1}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{x^n+1}\right)dx$.

Pe de altă parte

$0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2\dfrac{1}{x^n+1}dx\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2\dfrac{1}{x^n}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}\Bigg|_1^2\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^{1-n}}{1-n}-\dfrac{1}{1-n}\right)=0$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=1$.

42. ***a)*** $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\dfrac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt3}\Bigg|_0^1=\dfrac{2}{\sqrt3}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{3\sqrt3}$.

b) $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.

c) Arătăm că polinomul $g=X\left(X^2+1\right)^{6n+1}+X^{3n+2}\in\mathbb{Q}[X]$ se divide prin X^2+X+1. Fie ε o

rădăcină a lui $X^2+X+1\Rightarrow\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,\ \varepsilon^3=1$. $g(\varepsilon)=\varepsilon(-\varepsilon)^{6n+1}+\varepsilon^{3n+2}=0$, deci există $q\in\mathbb{Q}[X]$ astfel încât $g=q\cdot\left(X^2+X+1\right)\Rightarrow\int_0^1\left(x^2+x+1\right)q(x)f(x)dx=\int_0^1q(x)dx\in\mathbb{Q}$.

43. *a)* Avem $x^3+x^2+x+1=(x+1)\left(x^2+1\right)$ $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}\Leftrightarrow$ $a\left(x^2+1\right)+(bx+c)(x+1)=1\Rightarrow a=1,\ b=-1,\ c=1$.

b) $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\frac{3}{2}\ln2-\frac{\pi}{4}$.

c) $I_{4n+2}-I_{4n+1}+I_1+I_0=\int_0^1\frac{x^{4n+2}-x^{4n+1}+x+1}{x^3+x^2+x+1}dx\in\mathbb{Q}$ pentru că polinomul $g=X^{4n+2}-X^{4n+1}+X+1\in\mathbb{Q}[X]$ se divide prin $(X+1)\left(X^2+1\right)$.

44. *a)* $I_1+I_3=\int_0^1\frac{x+1}{x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx=\frac{\pi}{4}$.

b) $0\le\lim_{n\to+\infty}\int_0^1x^nf(x)\,dx\le\lim_{n\to+\infty}\int_0^1x^n\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

c) $I_{n+3}+I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+3}+x^{n+2}+x^{n+1}+x^n}{x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$.

d) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}-x^n}{x^3+x^2+x+1}dx\le0\Rightarrow$ şirul $(I_n)_{n\ge0}$ este descrescător.

$I_{n+3}+I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}\le4I_{n+3}\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{4(n-2)}$;

$I_{n+3}+I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}\ge4I_n\Rightarrow I_n\le\frac{1}{4(n+1)}$. Din ultimele două relaţii avem $\frac{n}{4(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{4(n-2)}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{4}$.

e) $I_{2n+3}+I_{2n+1}=\int_0^1\frac{x^{2n+3}+x^{2n+1}}{x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2n+1}+1-1}{x+1}dx=$

$\int_0^1\left[\left(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-...+1\right)-\frac{1}{x+1}\right]dx=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}+...+1-\ln2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

45. *a)* $\int_0^1g(x)dx=\int_0^1e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^1=1-\frac{1}{e}$.

b) $\int_0^1x^5g\left(x^3\right)dx=\int_0^1x^5e^{-x^3}dx\overset{x^3=t}{=}\frac{1}{3}\int_0^1te^{-t}dt=-\frac{1}{3}te^{-t}\Big|_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1e^{-t}dt=\frac{e-2}{3e}$.

c) $I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}e^{-x^3}dx>0\Rightarrow I_{n+1}>I_n$.

$0\le I_n=\int_1^ne^{-x^3}dx\le\int_1^ne^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^n=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}<\frac{1}{e}$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit şi cum şirul este şi monoton crescător, rezultă că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.

46. *a)* $I_4=\int_2^3\frac{t^4}{t^2+1}dt=\int_2^3\frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt=\int_2^3\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{2}{3}+\text{arctg}3-\text{arctg}2$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_2^3\frac{t^{n+1}-t^n}{t^2+1}dt\ge0$.

c) Cum şirul $(I_n)_{n\ge0}$ este monoton crescător rezultă că există $\lim_{n\to+\infty}I_n$. Dar $I_{n+2}+I_n=\int_2^3\frac{t^n\left(t^2+1\right)}{t^2+1}dt=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(I_{n+2}+I_n\right)=+\infty$, deci $\lim_{n\to+\infty}I_n=+\infty$.

Altfel. $\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\int_2^3\frac{t^n}{t^2+1}dt\ge\lim_{n\to+\infty}\int_2^3\frac{t^n}{10}dt=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10(n+1)}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)dt=+\infty$.

47. *a)* $f_4(1)+f_1(1)=\int_0^1\frac{t^4+t}{t^3+1}dt=\frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x\to0}\frac{f_{2012}(x)}{x^{2013}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^{2012}}{x^3+1}}{2013x^{2012}}=\frac{1}{2013}$.

c) $0\le f_n(1)=\int_0^1\frac{t^n}{t^3+1}dt\le\int_0^1t^ndt=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}f_n(1)=0$, deci şirul $\left(f_n(1)\right)_{n\ge0}$ este convergent.

d) $\lim_{n\to+\infty}f_n(2)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^2\frac{t^n}{t^3+1}dt=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{t^n}{t^3+1}dt+\int_1^2\frac{t^n}{t^3+1}dt\right)=\lim_{n\to+\infty}\int_1^2\frac{t^n}{t^3+1}dt\ge$ $\lim_{n\to+\infty}\int_1^2\frac{t^n}{9}dt=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9(n+1)}\left(2^{n+1}-1\right)dt=+\infty$.

48. *a)* $I_1+I_3=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+tg^2x\right)tgxdx=\frac{1}{2}tg^2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}tg^nx(1-tgx)\ dx\le0$, pentru că $0\le tgx\le1\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este monoton descrescător şi cum şirul este mărginit inferior(pentru că $0\le I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}tg^nx\,dx$), rezultă convergenţa.

c) $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tg^n x\,dx \overset{tgx=t}{=} \int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{1}\frac{t^n}{t^2+1}dt$.

d) $0\le \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \le \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt3}}^1 x^n dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^n\right)=0$.

49. a) $I_1\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgx\,dx = -\ln\cos x|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln 2$.

b) şi c) $0\le \lim_{n\to+\infty} I_n(a)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^a tg^n x\,dx\le \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x\,dx \le$

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)tg^n x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}tg^{n+1}x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}=0$, deci şirul $(I_n(a))_{n\ge1}$ este convergent la 0.

d) $\lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^n x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}tg^nx\,dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}tg^nx\,dx \overset{tgx=t}{=}$

$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{\sqrt3}\frac{t^n}{t^2+1}dt \ge \lim_{n\to+\infty}\int_1^{\sqrt3}\frac{t^n}{4}dt=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4(n+1)}\left(\sqrt3^{n+1}-1\right)=+\infty$, deci $\lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{\pi}{3}\right)=+\infty$.

50. a) $I_2(\pi)=\int_0^\pi(1+\sin x)^2dx=\int_0^\pi\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos2x}{2}\right)dx=3\pi$.

b) $\lim_{a\to0}\frac{I_{2012}(a)}{a}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{a\to0}(1+\sin a)^{2012}=1$.

c)

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a(1+\sin x)^ndx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^a\left(1+C_n^1\sin x+C_n^2\sin^2x+\ldots\right)dx\ge$

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a\left(1+C_n^1\sin x\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\left(a+n(1-\cos a)\right)=+\infty$.

51. a) $x_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^1dx=(x+\sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+1$.

b) $x_{n+1}-x_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^n(\cos x)dx\ge0$, deci şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

c) $x_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^ndx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^ndt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)^ndt$.

d) $\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)^ndx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+C_n^1\sin x+C_n^2\sin^2x+\ldots\right)dx\ge$

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+C_n^1\sin x\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right)=+\infty$, deci $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

52. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2-\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2x}dx\overset{\sin x=t}{=}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\text{arctg}\,t|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) Fie F o primitivă a funcţiei f, deci $F'(x)=f(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2x}\ge0,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) $\int_0^{2\pi}xf(x)dx=\int_0^\pi x\frac{\cos x}{2-\cos^2x}dx+\int_\pi^{2\pi}x\frac{\cos x}{2-\cos^2x}dx$.

Pe de altă parte

$\int_\pi^{2\pi}x\frac{\cos x}{2-\cos^2x}dx\overset{x=\pi+t}{=}\int_0^\pi(t+\pi)\frac{-\cos t}{2-\cos^2t}dt=-\int_0^\pi t\frac{\cos t}{2-\cos^2t}dt-\pi\int_0^\pi\frac{\cos t}{2-\cos^2t}dt$.

Deci $\int_0^{2\pi}xf(x)dx=\int_0^\pi x\frac{\cos x}{2-\cos^2x}dx-\int_0^\pi t\frac{\cos t}{2-\cos^2t}dt-\pi\int_0^\pi\frac{\cos t}{2-\cos^2t}dt=-\pi\int_0^\pi\frac{\cos t}{1+\sin^2t}dt=0$

53. a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1x'\text{arcctg}\,x\,dx=x\,\text{arcctg}x|_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}+\frac12\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac12\ln2$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\int_0^xf(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\left(x\,\text{arcctg}x+\frac12\ln\left(x^2+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\text{arcctg}x}{\frac1x}+\frac12\ln\left(x^2+1\right)\right)=$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}+\frac12\ln\left(x^2+1\right)\right)=+\infty$.

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n\text{arcctg}\frac kn=\int_0^1f(x)dx=\frac\pi4+\frac12\ln2$.

54. a) $I_1=\int_0^\pi\cos x\,dx=\sin x|_0^\pi=0$.

b) $0\le I_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\cos^nx\,dx\le I_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}dx=\frac\pi n\le\frac\pi2$.

c) Din b) avem $0 \le I_n \le \frac{\pi}{n}$ și prin trecere la limită rezultă $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

55. a) Aria cerută este egală cu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x |_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \cos t dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

c) Arătăm că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este monoton și mărginit.

Monotonia: $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x(\cos x - 1)dx \le 0$, deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător.

Mărginirea: $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

56. a) $\int_0^1 f(e^x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

b) Volumul cerut este egal cu $\pi\int_1^e f^2(x)dx = \pi\int_1^e \ln x dx = \pi\left(x\ln x|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = \pi$.

c) $\int_0^1 e^{x^2}dx \overset{e^{x^2}=t}{=} \int_1^e t\left(\sqrt{\ln t}\right)' dt = t\sqrt{\ln t}\Big|_1^e - \int_1^e \sqrt{\ln t}dt = e - \int_1^e \sqrt{\ln t}dt$;

deci $\int_0^1 e^{x^2}dx + \int_1^e f(x)dx = e$.

57. a) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = \ln(t^2+t+1)\Big|_0^{\frac{3}{4}} = \ln\frac{37}{16}$.

b) În $\int_1^3 g(x)dx$ facem schimbarea de variabilă

$g(x) = t$, deci $\begin{cases} x\in[1,3] \Rightarrow t\in[0,1] \\ x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt \end{cases}$ și obținem

$\int_1^3 g(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt = tf(t)|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 3$.

c) Considerăm funcția $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(\alpha) = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\alpha g(x)dx - \alpha$.

$h'(\alpha) = g(\alpha) - 1 \le 0$, pentru că $g(\alpha)\in[0,1]$, $\forall\alpha\in[1,3]$. Deci funcția h este descrescătoare, adică $h(\alpha) \le h(3) = 0$, $\forall\alpha\in[1,3]$.

58. a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$ și cum $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$, $\forall x \ge 0$.

Aria cerută este egală cu

$\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (x - \text{arctg}\, x)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - (x\,\text{arctg}\, x)|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

b) La punctul a) am arătat că funcția f este strict crescătoare, deci este injectivă.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă și din $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, rezultă că f este surjectivă. În consecință funcția f este bijectivă.

c) În $\int_0^{1-\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx$ facem schimbarea de variabilă $f^{-1}(x) = t$, deci $\begin{cases} x\in\left[0, 1-\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t\in[0,1] \\ x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt \end{cases}$.

Obținem $\int_0^{1-\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt = tf(t)|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^{1-\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

59. a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$.

Aria este egală cu $\int_{-2}^0 |f(x)|dx = \int_{-2}^{-1} -(x+1)(x^2+1)dx + \int_{-1}^0 (x+1)(x^2+1)dx =$

$= \int_{-2}^{-1} -(x^3+x^2+x+1)dx + \int_{-1}^0 (x^3+x^2+x+1)dx = \frac{5}{2}$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$, $x\in\mathbb{R}$ rezultă că funcția f este strict crescătoare, deci este injectivă.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă și din $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, rezultă că f este surjectivă. În consecință funcția f este bijectivă.

c) În $\int_1^4 f^{-1}(x)dx$ facem schimbarea de variabilă $f^{-1}(x) = t$, deci $\begin{cases} x\in[1,4] \Rightarrow t\in[0,1] \\ x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt \end{cases}$ și

obținem $\int_1^4 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt = tf(t)|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = 4 - \int_0^1 f(t)dt = 4 - \frac{25}{12} = \frac{23}{12}$.

60. a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}$.

b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Trebuie arătat că f este continuă într-un punct oarecare $n\in\mathbb{Z}$. $f_s(n) = \lim_{x\nearrow n}(x-(n-1))(1-[x-(n-1)]) = 0$; $f_d(n) = \lim_{x\searrow n}(x-n)(1-(x-n)) = 0$; $f(n) = 0$, de unde rezultă continuitatea lui f, deci f admite primitive.

c) Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(a)=\int_a^{a+1} f(x)dx$. Cum g este derivabilă cu $g'(a)=f(a+1)-f(a)=0,\ \forall a\in\mathbb{R} \Rightarrow$ funcţia g este constantă, adică ceea ce trebuia demonstrat.

61. a) $\int_{-1}^1 xf(x)dx \overset{x=-t}{=} -\int_1^{-1}(-t)f(-t)dt = -\int_{-1}^1 tf(t)dt \Rightarrow \int_{-1}^1 xf(x)dx=0$.

b) $\int_0^1\left[f(x)f''(x)+(f'(x))^2\right]dx = \int_0^1\left[f'(x)f(x)\right]'dx = \left[f'(x)f(x)\right]_0^1 = -2012$.

c) $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$, deci inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le1$.

$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} x\big|_0^1=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1 dx=1$.

62. a) $\int\frac{f_{2012}(x)}{f_{2012}(x+1)}dx = \int\frac{\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+2012)}}{\frac{1}{(x+2)(x+3)...(x+2013)}}dx=\int\frac{x+2013}{x+2012}dx = x+\ln(x+2012)+C$

b) $\int_0^1(x^2+2)f_3(x^2)dx=\int_0^1(x^2+2)\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}dx=\int_0^1\frac12\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx=$

$\frac12\left(\operatorname{arctg}x\big|_0^1-\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt3}\Big|_0^1\right)=\frac12\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6\sqrt3}\right)$.

c) $\int_1^x f_n(t^3)dt=\int_1^x\frac{1}{(t^3+1)(t^3+2)...(t^3+n)}dt\le\int_1^x\frac{1}{1\cdot2\cdot...\cdot n}dt=\frac{x-1}{n!},\ \forall x\ge1,\ \forall n\ge1$.

63. a) $\int_0^1 f(x)dx = x\ln(x^2+1)\big|_0^1-\int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}dx = \ln2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\ln2-2+\frac{\pi}{2}$.

b) $g(-x)=\int_0^{-x}f(t^2)dt \overset{t=-y}{=} -\int_0^x f(y^2)dy=-g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) Limita este egală cu $\lim_{x\to0}\frac{f(x^{1006})+f((-x)^{1006})}{2013x^{2012}}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(x^{2012}+1)}{2013x^{2012}}=\frac{2}{2013}$.

64. a) $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg} x\big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2012}(\sin x)dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2012}(\cos x)dx$.

c) $\int_0^1 f_n(\sin x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sin^n x+1}dx$.

Pentru $x\in[0,1]\Rightarrow\sin x\in[0,\sin1]\Rightarrow\frac{1}{1+\sin^n1}\le\int_0^1\frac{1}{\sin^n x+1}dx\le1\Rightarrow$

$1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\sin^n1}\le\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sin^nx+1}dx\le1$.

65. a) $\int_0^1 f(\sqrt x)dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac12\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac32}}{\frac32}\Bigg|_0^1=\frac23\sqrt2-\frac13$.

b) $g'(x)=f(x)\ge0\Rightarrow g$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $g(x)=\int_0^x t^2\sqrt{t^4+1}dt\ge\int_0^x t^4dt=\frac{x^5}{5}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\Rightarrow$ graficul funcţiei f nu admite asimptote orizontale la $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty\Rightarrow$ graficul funcţiei g nu admite asimptote oblice la $+\infty$.

66. a) $A=\int_0^1|f_1(x)|dx=\int_0^1 f_1(x)dx=\left(\frac23\sqrt{(x+1)^3}\right)\Big|_0^1=\frac23(2\sqrt2-1)$.

b) $\int_0^1 x\left[f_1(e^x)\right]^2dx=\int_0^1 x(e^x+1)dx=\int_0^1 xe^xdx+\int_0^1 xdx=xe^x\big|_0^1-e^x\big|_0^1+\frac12=\frac32$.

c) $1\le I_n=\int_0^1\sqrt{x^n+1}dx\le\int_0^1(x^n+1)dx=\frac{1}{n+1}+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci, prin trecere la limită, obţinem $\lim_{n\to+\infty}I_n=1\Rightarrow$ şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent la 1.

67. a) $I_1=\int_0^1x\sqrt{x^2+1}dx=\frac12\cdot\frac{2(x^2+1)^{\frac32}}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt2-1}{3}$.

b) $0\le\int_0^1x^n\sqrt{x^2+1}dx\le\int_0^1x^n\sqrt2dx=\frac{\sqrt2}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

c) $I_n=\int_0^1x^n\sqrt{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{n+2}+x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1x^{n+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx+\int_0^1x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=$

$\sqrt2-(n+1)\int_0^1x^n\sqrt{x^2+1}dx+\sqrt2-(n-1)\int_0^1x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx=2\sqrt2-(n+1)I_n-(n-1)I_{n-2}\Rightarrow$

$I_n=\frac{1}{n+2}\left[2\sqrt2-(n-1)I_{n-2}\right]$.

68. a) $I_1=\int_0^1x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{(1-x^2)^{\frac32}}{3}\Bigg|_0^1=\frac13$.

b) $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx=$

$\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{n-1}{3}(I_{n-2}-I_n)\Rightarrow (n+2)I_n=(n-1)I_{n-2}$.

c) $0\le\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

69. a) $\int_1^e x\cdot f(x)dx=\int_1^e x\cdot\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2+1}{4}$.

b) $\int_1^e f^n(x)dx+n\int_1^e f^{n-1}(x)dx=\int_1^e x'\ln^n xdx+n\int_1^e\ln^{n-1}xdx=x\ln^n x\Big|_1^e-n\int_1^e\ln^{n-1}x+n\int_1^e\ln^{n-1}x=e^e$.

c) $\int_1^e \ln^n xdx \overset{\ln x=t}{=}\int_0^1 t^n e^t dt$;

$0\le\int_0^1 t^ne^tdt\le\int_0^1 t^n e\,dt=\frac{e}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^ne^tdt=\lim_{n\to+\infty}\int_1^e f^n(x)dx=0$.

În relația $\int_1^e f^{n+1}(x)dx+(n+1)\int_1^e f^n(x)dx=e^e$ trecem la limită

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_1^e f^{n+1}(x)dx+\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}n\int_1^e f^n(x)dx=e^e\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}n\int_1^e f^n(x)dx=e^e$.

70. a) $I_{n+3}+I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+3}+x^{n+1}+x^n}{x^3+x+1}dx=\frac{1}{n+1}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}-x^n}{x^3+x+1}dx\le0,\ \forall n\ge1$, deci șirul este descrescător.

c) Avem $0\le I_n\le\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

Pe de altă parte $3I_{n+3}\le I_{n+3}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}\le3I_n\Rightarrow\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{3(n-2)}$

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}nI_n=\frac13$.

71. a) $I_1=\int_0^1x\sqrt{x+1}dx=\int_1^2(t-1)\sqrt{t}dt=\frac{4\sqrt2+4}{15}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\sqrt{x+1}dx\le0,\ \forall n\ge1$, deci șirul este descrescător.

c) $nI_n=n\int_0^1x^n\sqrt{x+1}dx= =x^n(x\sqrt{x+1})\Big|_0^1-\int_0^1x^n\left(\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right)dx=\sqrt2-I_n-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{2\sqrt{x+1}}dx$.

Pe de altă parte $0\le I_n\le\int_0^1x^n\sqrt2dx=\frac{\sqrt2}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$ și

$0\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{2\sqrt{x+1}}dx\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{2}dx=\frac{1}{2(n+2)}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{2\sqrt{x+1}}dx=0$.

În final $\lim_{n\to+\infty}nI_n=\sqrt2$.

72. a) $\Gamma_f=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos2xdx=1$.

b) $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos4x}{2}dx=\pi\left(\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac18\sin4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n(2x)dx=\frac{\sin2x}{2}\cos^{n-1}2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2(2x)\cos^{n-2}(2x)dx=$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2}(2x)\left(1-\cos^2(2x)\right)dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^{n-2}(x)dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^n(x)dx$

de unde cerința.

73. a) $\int_0^2 f_1(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+(1-x)}dx+\int_1^2\frac{1}{1+(x-1)}dx=2\ln2$.

b) Fie F o primitivă oarecare a lui f_{2013}; $F'(x)=f_{2013}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2014-x}, & x\in[0,2013]\\ \frac{1}{x-2012}, & x>2013\end{cases}$;

$F''(x)=f'_{2013}(x)=\begin{cases}\frac{1}{(2014-x)^2}, & x\in(0,2013)\\ \frac{-1}{(x-2012)^2}, & x>2013\end{cases}$, deci F este convexă pe $(0,2013)$ și concavă pe $(2013,+\infty)$.

c) $\lim_{n\to+\infty}n\int_{3n-1}^{3n}f_n(x)dx=\lim_{n\to+\infty}n\int_{3n-1}^{3n}\frac{1}{x-n+1}dx=\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=\frac12$.

74. a) $F'(x)=f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare.

b) $\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+3)}dx=\frac12\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac12\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3\sqrt6}\right)$.

c) Din teorema de medie pentru integrale aplicată funcției $f:[x,2x]\to\mathbb{R}$, există $c_x\in(x,2x)$ astfel ca $\int_x^{2x}f(t)dt=(2x-x)f(c_x)$, deci $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-x)f(c_x)}{x}=\lim_{c_x\to\infty}f(c_x)=1$.

Tema 4.1 Subiecte date la examenul de bacalaureat în anii anteriori

Testul 1 Examen Bacalaureat, iulie 2012

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^2 = 2i$	3p
	$\|2i\| = 2$	2p
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$	1p
	$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$	2p
	$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$	2p
3.	$2^{x+1} \le 2^2$	1p
	$x + 1 \le 2$	2p
	$S = (-\infty, 1]$	2p
4.	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	1p
	Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ și $\{1,3,5\} \Rightarrow 4$ cazuri favorabile	2p
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow 10$ cazuri posibile; $p = \dfrac{2}{5}$.	2p
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 3$	4p
	$a = 1$	1p
6.	$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$	2p
	$\cos A = -\dfrac{1}{5}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$	2p
	$\det A = 3m - 6$	3p
b)	Sistemul are o soluție unică și numai dacă $\det A \ne 0$	3p
	Finalizare $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	3p
c)	$\det A = 0$ și $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \ne 0$, deci matricea sistemului are rangul doi	1p
	$z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3\alpha \\ x + 2y = -3\alpha \end{cases} \Rightarrow x = -\alpha,\ y = -\alpha$	2p
	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 \Rightarrow (-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$	1p
	Soluția este $(x_0, y_0, z_0) - (1, 1, -1)$	1p
2.a)	$X(p) \cdot X(q) = X(p + q + pq)$	3p
	$p, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow (p+1)(q+1) \ne 0 \Rightarrow p + q + pq \ne -1$, deci $X(p+q+pq) \in G$	2p
b)	Pentru orice $X(p) \in G$, există $X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right)$ astfel încât $X(p) \cdot X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right) = X(0)$	3p
	$-\dfrac{p}{1+p} \ne -1 \Rightarrow X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right) \in G$ și $X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right)$ este inversul lui $X(p)$	2p
c)	$(X(p))^3 = X(7)$	1p
	$(X(p))^3 = X((p+1)^3 - 1)$	3p
	$(p+1)^3 = 8$, deci $p = 1$ și soluția este $X(1)$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^3 - 12$	3p
	$f'(x) \ge 0$ pentru orice $x \in [2, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$	2p
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{f(x)} - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2 - 12} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty$	3p
c)	Șirul lui Rolle pentru funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ este $-\infty, 16 - a, -16 - a, +\infty$	3p
	Ecuația are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $a \in (16, 16)$	21p
2.a)	$F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	1p
	$f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	1p
	F este strict crescătoare	2p
b)	$\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1} dx = \int_0^1 \dfrac{2x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \dfrac{dx}{x+1} + \int_0^1 \dfrac{dx}{x+2} =$	3p
	$= \ln(x+1)\Big\|_0^1 + \ln(x+2)\Big\|_0^1 = \ln 3$	2p
c)	$\int_x^{2x} f(t)dt = (2t - \ln(t+2))\Big\|_x^{2x} = 2x - \ln\dfrac{2x+2}{x+2}$, pentru $x > 0$	3p
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \ln\dfrac{2x+2}{x+2}}{x} = 2$	2p

Testul 2 Examen Bacalaureat, iulie 2012, subiect de rezervă

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+2i)^2 = -3 + 4i$	3p
	Partea reală este egală cu -3	2p

2.	$x_1 + x_2 = 3$	2p
	$x_1 x_2 = a$	2p
	$a = 2$	1p
3.	$x = g(5) \Rightarrow f(x) = 5$	2p
	$2^x + 3 = 5$	2p
	$x = 1$	1p
4.	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	1p
	Numărul cazurilor posibile este $2^5 = 32$	2p
	Numărul submulţimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow 10$ cazuri favorabile	1p
	$p = \dfrac{5}{16}$	1p
5.	$\overrightarrow{AB} \cdot 6\vec{i} + 9\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1)\vec{i} + (y_M - 3)\vec{j}$	2p
	$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = 2 \\ y_M - 3 = 3 \end{cases}$	2p
	$M(3,6)$	1p
6.	$\sin x + 2\cos x = 3\cos x$	2p
	$\sin x = \cos x$	1p
	$x = \dfrac{\pi}{4}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$D(0,1,-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$	2p
	$D(0,1,-1) = 12$	3p
b)	$A(0,1,x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 3 & 3x^2 \end{pmatrix}$	1p
	Există minorul $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}A(0,1,x) \geq 2$	1p
	$\text{rang}A(0,1,x) = 2 \Leftrightarrow D(0,1,x) = 0$	1p
	$D(0,1,x) = 6x(x-1) \Rightarrow x = 0$ sau $x = 1$	2p
c)	$D(a,b,c) = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$	1p
	$D(a,b,c) = 6(b-a)(c-a)(c-b)$	2p
	$D(a,b,c) = 0 \Rightarrow a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$ deci triunghiul este isoscel	2p
2.a)	$f(\hat{1}) = \hat{0}$	2p
	$f(\hat{3}) = \hat{0}$	2p
	Finalizare	1p

b)	P are rădăcinile $\hat{1}$, $\hat{3}$ şi $\hat{4}$	3p
	$P = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X - \hat{4}) = (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X + \hat{1})$	2p
c)	$f(\hat{1}) = f(\hat{3})$, deci f nu este injectivă	2p
	Im f nu poate avea 5 elemente, deci f nu este nici surjectivă	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \dfrac{3 - 9x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$	4p
	Finalizare	1p
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	3p
	Dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p
c)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$	2p
	Din monotonie, valoarea maximă a funcţiei este $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2\sqrt{7}$	2p
	Imaginea funcţiei este $\left(-1, 2\sqrt{7}\right)$	1p
2.a)	F este derivabilă şi $F'(x) = \ln x$, pentru orice $x > 0$	3p
	$F' = f$	2p
b)	Aria este egală cu $\int_1^e \lvert \ln x \rvert dx =$	2p
	$= F(x)\Big\vert_1^e 1$	3p
c)	$(p+1)\int_1^x f^p(t)dt = \int_1^x t \cdot (p+1) \cdot f^p(t) \cdot \frac{1}{t} dt =$	1p
	$= \int_1^x t \cdot (\ln^{p+1})' dt = t \cdot \ln^{p+1} t \Big\vert_1^x - \int_1^x \ln^{p+1} t dt = x \ln^{p+1} x - \int_1^x \ln^{p+1} t dt$	3p
	Finalizare	1p

Testul 3 Examen Bacalaureat, mai 2012, sesiunea specială

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^2 + mx + 4 = 0$ are soluţia $x = 2 \Rightarrow m = -4$	3p
	Pentru $m = -4$ cele două mulţimi sunt egale	2p
2.	$x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$	2p
	$\Delta = 1$	1p
	$y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4}$	2p
3.	Condiţie: $x > 0$	2p
	$3^{\log_3 x} < 3^0 \Leftrightarrow x < 1$	2p
	$x \in (0,1)$	1p

4.	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	2p
	$\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere $\Rightarrow$ 25 de cazuri favorabile	2p
	$\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,...,9\}$ şi $b\in\{0,1,2,3,...,9\}$ sunt 90 de numere $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile	1p
	$p=\frac{5}{18}$	1p
5.	$\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}$	2p
	$a^2-6a+9=0$	2p
	$a=3$	1p
6.	$S_{ABC}=12$	2p
	$R=\frac{abc}{4S}$	2p
	$R=\frac{25}{8}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	3p
	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	2p
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y&0&i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\0&1&0\\i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)&0&\cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix},\forall x,y\in\mathbb{R}$;	1p
	$A(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y)&0&i\sin(x+y)\\0&1&0\\i\sin(x+y)&0&\cos(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice x, y $\in\mathbb{R}$	3p
	Finalizare	1p
c)	$A^{2012}(x)=A(2012x)$	2p
	$A(2012x)=I_3\Leftrightarrow\cos(2012x)=1$ şi $\sin(2012x)=0$	1p
	$x=\frac{k\pi}{1006}$, $k\in\mathbb{Z}$	2p
2.*a)*	$x\circ\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=x$, pentru orice $x\in G$	2p
	$\frac{1}{2}\circ x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=x$ pentru orice $x\in G$	2p
	Finalizare	1p

b)	$x\circ x'=\frac{xx'}{2xx'-x-x'+1}=\frac{x'x}{2x'x-x'-x+1}=x'\circ x$, pentru orice $x,x'\in G$	1p
	$x\circ x'=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=1-x$	3p
	$x\in(0,1)$	1p
c)	f este bijectivă	2p
	$f(x\circ y)=\frac{1}{x\circ y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$ pentru orice $x,y\in G$	2p
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$ pentru orice $x,y\in G$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=$	3p
	$=0$	2p
b)	$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$	1p
	$f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$	2p
	$f''(x)>0$ pentru orice x real, deci f este convexă	2p
c)	$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\Rightarrow g'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$ pentru orice $x>0$	2p
	$x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{-\sqrt{x}}$	2p
	$g'(x)>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(o,+\infty)$	2p
2.*a)*	$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$	1p
	$J_1=\cos t\Big\vert_0^{\frac{1}{2}}$	2p
	$J_1=1$	1p
b)	$I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$	1p
	$I_1=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)3}\Big\vert_0^1$	3p
	$I_1=\frac{1}{3}$	1p
c)	$J_{2n}-J_{2n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\cos^2x\,dx$	2p
	Cu schimbarea de variabilă $\sin x=t$ obţinem $J_{2n}-J_{2n+2}=\int_0^1 t^{2n}\cdot\sqrt{1-t^2}\,dt=I_{2n}$	3p

Testul 4 Examen Bacalaureat, august 2012

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})=\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$	3p
	Finalizare	2p
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=-4$	3p
	Distanţa este egală cu 3	2p
3.	Notăm $3^x=t$ şi obţinem $t+3t=4$	3p
	$t=1 \Leftrightarrow x=0$	2p
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k \cdot x^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{20}^k\cdot x^{20-k-\frac{k}{2}}$	2p
	$20-k-\frac{k}{2}=14 \Leftrightarrow k=4$	2p
	Rangul termenului este 5	1p
5.	$m_d=-\frac{3}{2}$	2p
	Ecuaţia paralelei este $y-y_A=-\frac{3}{2}(x-x_A)$ adică $y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$	3p
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$	3p
	$m(\sphericalangle C)=30°$, deoarece $m(\sphericalangle A)>m(\sphericalangle C)$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & a & 1\\ a+2 & a & a+1\\ a+1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=$	2p
	$=\begin{vmatrix}3a+3 & a & 2a+4\\ 3a+3 & a & a+1\\ 3a+3 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 1 & a & a+1\\ 1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 0 & 0 & -a+1\\ 0 & a-1 & -2a-1\end{vmatrix}$	2p
	Finalizare	1p
b)	Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq 0$	2p
	$\det A=0 \Leftrightarrow a\in\{-1,1,-3\}$	2p
c)	$a=-2\Rightarrow\begin{cases}-x-2y=1\\ -2y-z=1\\ -x-5y+3z=2\end{cases}$	1p
	$x=-\frac{1}{9}, y=-\frac{4}{9}, z=-\frac{1}{9}$	4p
2.a)	$\hat{0}^5=\hat{0}, \hat{1}^5=\hat{1}, \hat{2}^5=\hat{2}, \hat{3}^5=\hat{3}, \hat{4}^5=\hat{4}$	5p
b)	$f=X^8+X^4+\hat{3}X^4+\hat{3}=X^4(X^4+\hat{1})+\hat{3}(X^4+\hat{1})$	2p
	$f=(X^4+\hat{1})(X^4+\hat{3})$	3p
c)	$f(\hat{0})=\hat{3}$	1p
	$a\neq\hat{0}\Rightarrow a^4=\hat{1}$	2p
	$f(a)=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}=\hat{3}$ pentru orice $a\neq\hat{0}$	1p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	2p
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=2$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$	2p
	$y=2x$ este ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	1p
c)	f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f$ este surjectivă, deci ecuaţia are soluţie	2p
	$f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă, deci soluţia e unică	3p
2.a)	$I_1=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{e-1}{2}$	2p
b)	$2I_p=\int_0^1 x^{p-1}(2xe^{x^2})dx=\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'x^{p-1}dx=x^{p-1}e^{x^2}\Big\vert_0^1-(p-1)\int_0^1 e^{x^2}x^{p-2}dx$	3p
	$2I_p=e-(p-1)I_{p-2}\Rightarrow 2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$	2p
c)	Considerăm funcţia continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{x^2}$ şirul de diviziuni $\Delta_n=\left(\frac{k}{n}\right)_{k=\overline{0,n}}$ cu $\lVert\Delta_n\rVert\to 0$ şi punctele intermediare $\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$	1p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k+1}^{n}\frac{k}{n}\cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-1}{2}$	2p

Testul 5 Bacalaureat 2012, Model MECTS (www.edu.ro)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-24\le x+1\le 24$	2p
	$-25\le x\le 23$	2p
	Card $A=49$	2p
2.	$2x-1=2x^2-3x+1$	1p
	$x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$	3p
	Punctele de intersecţie sunt $(2,3)$ şi $\left(\frac{1}{2},0\right)$	2p

3.	$1+7x=1+3x+3x^2+x^3$	1p
	$x(x^2+3x-4)=0$	1p
	$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-4$	3p
4.	Alegem 2 numere impare din cele 5 în $C_5^2=10$ moduri	2p
	Alegem un număr par din cele 5 în 5 moduri	1p
	Sunt 50 de submulțimi	2p
5.	Mijlocul segmentului are coordonatele (2, 1)	1p
	Dreapta AB are panta 3, deci mediatoarea are panta $-\frac{1}{3}$	2p
	Ecuația mediatoarei este $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$	2p
6.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x=\frac{1}{3}$	2p
	$\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	2p
	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$\Delta=\begin{vmatrix}1 & m & m^2\\ m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & m\end{vmatrix}=-(m^3-1)^2$	3p
	Finalizare: $m=1$	2p
b)	Dacă sistemul are soluții nenule, atunci $\Delta=0$	2p
	În acest caz, sistemul se reduce la $x+y+z=0$	1p
	Această ecuație nu are soluții cu toate componentele strict pozitive	2p
c)	Pentru $m=1$, rangul este 1	2p
	Pentru $m\neq 1$, rangul este 3	3p
2.*a)*	$(x*y)*z=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1)+1$ și $x*(y*z)=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1)+1$	4p
	Finalizare: legea este asociativă	1p
b)	Trebuie să arătăm că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	1p
	$x*e=x\Leftrightarrow x+e-xe+1=2x\Leftrightarrow(e+1)(x-1)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci $e=-1$	3p
	Verificarea relației $(-1)*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$	1p
c)	$x*x*x=\frac{x^3-3x^2+3x+3}{4}$	2p
	Ecuația $x*x*x=3$ este echivalentă cu $(x-3)\underbrace{(x^2+3)}_{>0}=0\Rightarrow x=3$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$f(-x)=-x^3+3x+2$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+2}{-x^3+3x+2}=-1$	3p
b)	$f'(A)=3A^2-3$	2p

	$f'(x)\le 0,\forall x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$	3p
c)	$f(1)=0, f(-1)=4, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$	2p
	Din studiul variației funcției deducem că ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $m\in(0,4)$	3p
2.*a)*	$I_2=\int_0^1 1dx-2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x^4dx=$	1p
	$=\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{8}{15}$	1p
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx\ge 0$ pentru orice n, deci șirul este descrescător	3p
	$I_n\ge 0$ deci șirul este mărginit inferior	1p
	Finalizare	1p
c)	$I_n=x(1-x^2)^n\Big\vert_0^1-n\int_0^1 x(1-x^2)^{n-1}\cdot(-2x)dx=$	2p
	$=-2n\int_0^1\left[(1-x^2)-1\right](1-x^2)^{n-1}dx=$	1p
	$=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n=2nI_{n-1},\ \forall n\ge 2$	

Testul 6 Examen Bacalaureat, iunie 2011

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1<\sqrt{2}<2$	2p
	$2<\sqrt{5}<3$	2p
	Rezultă că 2 este singurul număr întreg din intervalul dat	1p
2.	Axa de simetrie a parabolei este dreapta de ecuație $x=x_V=-\frac{b}{2a}$	2p
	$-\frac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$	3p
3.	$x-\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \middle\vert k\in\mathbb{Z}\right\}$	3p
	$x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$	2p
4.	$A_n^2=n(n-1)$	2p
	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$	2p
	$n(n-1)=12\Rightarrow n=4$	1p
5.	$\frac{a}{1}=\frac{1}{-2}$	3p
	$a=-\frac{1}{2}$	2p

6.	$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=2$	2p
	$1=2\sin x\cdot\cos x$	2p
	$\sin 2x=1$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&y&y^2\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}$	1p
	$\begin{pmatrix}1&x&x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&y&y^2\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$	4p
b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0&x-y&x^2-y^2\\0&0&2(x-y)\\0&0&0\end{pmatrix}$	1p
	$(A(x)-A(y))^2=\begin{pmatrix}0&0&2(x-y)^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	2p
	$(A(x)-A(y))^3=O_3\Rightarrow(A(x)-A(y))^{2011}=O_3$	2p
c)	Matricea A este inversabilă	1p
	$(A(x))^{-1}=\begin{pmatrix}1&-x&x^2\\0&1&-2x\\0&0&1\end{pmatrix}=A(-x)$	4p
2.a)	$f(-1)=-1+1-\alpha-i(\alpha-2)+\alpha+(\alpha-2)i$	2p
	Finalizare: $f(-1)=0$	3p
b)	Rădăcinile lui g sunt de forma $x_1=u+iv$ şi $x_2=u-iv$, unde $u,v\in\mathbb{R}$	1p
	Din relaţia lui Viète rezultă $x_1+x_2=-p$ şi $x_1x_2=q$	1p
	$p=-2\in\mathbb{R}$ şi $q=u^2+v^2\in\mathbb{R}$	2p
	Ecuaţia $x^2+px+q=0$, cu $p,q\in\mathbb{R}$, are soluţii distincte complex conjugate dacă şi numai dacă $\Delta<0$, de unde $p^2<4q$	1p
c)	$f=(X+1)(X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i)$	2p
	Polinomul $h=X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte complex conjugate	1p
	Conform punctului **b)**, rezultă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{R}$, de unde $\alpha=2$, care convine	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{x^2-1}$	3p

	$f'(x)<0$ pentru orice $x>1$, de unde concluzia	2p
b)	$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală	2p
	f este continuă pe $(1,\infty)$, deci nu are alte asimptote verticale	1p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{x^{-1}}$ – nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$	2p
	Cu regula lui l'Hospital, limita este $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$	3p
2.a)	$\int_1^4(x-3\sqrt{x}+2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\Big\|_1^4=$	4p
	$=-\frac{1}{2}$	1p
b)	$A=\int_1^2\left\|\frac{f(x)}{x}\right\|dx=-\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx$, deoarece $f\le0$ pe intervalul $[1,2]$	2p
	$=-\int_1^2xdx+3\int_1^2dx-\int_1^2\frac{2}{x}dx=$	1p
	$=\frac{3}{2}-2\ln2$	2p
c)	$\int_1^2f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)(x^2-3x+2)^n\Big\|_1^2-$ $-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^2nf^{n-1}(x)dx=$	3p
	$=-\frac{n}{2}\int_1^2(4x^2-12x+8+1)f^{n-1}(x)dx=-\frac{4n}{2}\int_1^2f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2f^{n-1}(x)dx$, de unde concluzia	2p

Testul 7 Examen Bacalaureat, august 2011

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3=b_1q^2, b_4=b_1q^3$	2p
	$24=6q^2$	2p
	$q=2$	1p
2.	$1-a^2=0$	3p
	$a=1$ sau $a=-1$	2p
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$	1p
	Deoarece $\frac{3}{2}>1$, inecuaţia devine $x<-x$	2p
	$S=(-\infty,0)$	2p
4.	$T_{k+1}=C_{10}^k\sqrt{2}^k, k\in\{0,1,\dots,10\}$	2p

	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k$ par	2p
	Sunt 6 termeni raţionali	1p
5.	$BC: x+y-1=0$	2p
	Distanţa este $\frac{\lvert 2+2-1\rvert}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$	3p
6.	$\cos 60^0=\frac{1}{2}$	2p
	$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=$	2p
	$=10$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$	4p
	Aşadar $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\in H$	1p
b)	$(A^n)^2=A^{2n}=(A^2)^n=$	2p
	$=A^n$, deci $A^n\in H$	3p
c)	Matricele $\begin{pmatrix}1&x\\0&0\end{pmatrix}$ aparţin lui H pentru orice $x\in\mathbb{R}$	4p
	Finalizare	1p
2.a)	Restul împărţirii polinomului f la $X-i$ este $f(i)$	2p
	$f(i)=(2i)^{10}=-2^{10}$	3p
b)	$f=\sum_{k=0}^{10}\left(C_{10}^kX^{10-k}i^k+C_{10}^kX^{10-k}(-i)^k\right)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^kX^{10-k}i^k\left(1+(-i)^k\right)$	2p
	$a_{2p+1}=0\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4\}$	1p
	$a_{2p}=C_{10}^{2p}i^{2p}\left(1+(-1)^{2p}\right)=2C_{10}^{2p}\cdot(-1)^p\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4,5\}$	2p
c)	Dacă z este rădăcină, atunci $(z+i)^{10}=-(z-i)^{10}$, deci $\lvert z+i\rvert=\lvert z-i\rvert$	3p
	Punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $\pm i$, deci aparţine axei reale	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$	2p
	$f'(x)=5x^4-5$	2p
	$f'(2)=75$	1p
b)	$f''(x)=20x^3$ se anulează în 0	3p
	Deoarece f'' are semne opuse de o parte şi de cealaltă a lui 0, rezultă că 0 este punct de inflexiune.	2p
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x^4-1=0\Rightarrow x=\pm1$	1p
	Tabelul de variaţie a funcţiei f	2p

		2p
	Finalizare	3p
2.a)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\rvert_0^1=$	2p
	$=\frac{e-1}{e}$	2p
b)	Cu schimbarea de variabilă $x^3=t$ se obţine $\frac{1}{3}\int_0^1 t\cdot e^{-t}dt=$	3p
	$=-\frac{1}{3}te^{-t}\Big\rvert_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{e-2}{3e}$	2p
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}g(x^3)dx=\int_n^{n+1}e^{-x^3}dx\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este crescător	2p
	$0\leq I_n\leq\int_1^n e^{-x}dx=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}<\frac{1}{e},\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit	2p
	Deoarece şirul este monoton şi mărginit, el este convergent	1p

Testul 8 Bacalaureat 2011, Model MECTS (www.edu.ro)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert 1-i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}=$	3p
	$=\sqrt{4}=2$	2p
2.	$x^2+x+1-y=0$	1p
	$\Delta=4y-3\geq 0$	2p
	$\mathrm{Im}_f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$	2p
3.	$b_1=\frac{3}{2}$	1p
	$q^2=4$	2p
	$b_7=96$	2p
4.	$\log_a x=\log_a 9-\log_a 8$	2p
	$\log_a x=\log_a\frac{9}{8}\Rightarrow x=\frac{9}{8}$	3p
5.	$m_d=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_{d'}=2$ unde $d\perp d'$	2p
	Ecuaţia dreptei d' este $y=2x-4$	3p
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{1}{9}$	2p
	$\cos x=\pm\frac{1}{3}$	1p
	$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{3}$	2p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)-A(0)=\begin{pmatrix}0&-4&16\\0&0&-8\\0&0&0\end{pmatrix}$	2p
	$(A(2)-A(0))^3=O_3$	2p
	$(A(2)-A(0))^{2010}=O_3$	1p
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&-2x-2y&4y^2+8xy+4x^2\\0&1&-4x-4y\\0&0&1\end{pmatrix}$	3p
	Finalizare	2p
c)	$\det(A(x))=1\neq 0$, deci matricea este inversabilă	1p
	$A(x)A(-x)=A(0)=I_3$	2p
	$A^{-1}(x)=A(-x)=\begin{pmatrix}1&2x&4x^2\\0&1&4x\\0&0&0\end{pmatrix}$	2p
2.a)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*x=x,\forall x\in G$	1p
	Verificare	3p
	Legea „*" are element neutru $e=\frac{1}{2}$	1p
b)	Orice element din *G* este simetrizabil şi $x'=1-x$	3p
	$0<x'<1$, deci $x'\in G$	2p
c)	Justificarea faptului că funcţia *f* este bijectivă	2p
	$f(x*y)=\frac{1}{x*y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$	2p
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=f(x*y)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{n\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to 5}(x-2)(x-3)(x-4)=$	2p
	$=6$	1p
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{n-1}{n-5}$	1p
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n=$	1p
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$	1p
	$=e^4$	2p
c)	$f(2)=1,f(3)=1,f(4)=1,f(5)=1$	1p

	f continuă pe intervalele $[2,3],[3,4],[4,5]$	1p
	f derivabilă pe intervalele $(2,3),(3,4),(4,5)$	1p
	Din teorema lui Rolle şi din faptul că f' este de gradul trei rezultă că $f'(x)=0$ are exact trei soluţii reale distincte	2p
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+1}dx=$	1p
	$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\text{arctg}x\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{4}$	1p
	$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\vert_0^1=\frac{\ln 2}{2}$	2p
	$I_0=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	1p
b)	$I_2-I_0=\int_0^1\frac{(x^2+x+1)^2-1}{x^2+1}dx=$	1p
	$\int_0^1(x^2+2x+2)dx-\int_0^1\frac{2}{x^2+1}dx=$	1p
	$=\frac{10}{3}-2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=$	1p
	$=\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\notin\mathbb{Q}$	2p
c)	X^2+1 divide $(X^2+X+1)^{4n+1}-X$	2p
	$\frac{(x^2+x+1)^{4n+1}-x}{x^2+1}=g(x)$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$	1p
	$\int_0^1 g(x)dx\in\mathbb{Q}$	2p

Testul 9 Examen Bacalaureat, iunie 2010

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$((1-i)(i-1))^4=(2i)^4=$	3p
	$=16$	2p
2.	$f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=$	2p
	$=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{3-x}{3+x}=$	2p
	$=-f(x)$	1p
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$	2p
	$x\in(-4,2)$	2p
	$(-4,2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	1p

4.	25 de numere sunt divizibile cu 4	1p
	20 de numere sunt divizibile cu 5	1p
	5 numere sunt divizibile cu 4 şi cu 5	1p
	Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	2p
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overline{MQ}=(a-1)\bar{i}+(b+2)\bar{j}$ şi $\overline{NP}=2\bar{i}+3\bar{j}$	2p
	$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overline{MQ}=\overline{NP} \Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$	2p
	Punctul căutat este $Q(3,1)$	1p
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$	3p
	$AD=\dfrac{4\sqrt{14}}{5}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A)=0$	3p
	$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$ (sau orice alt minor de ordinul 2 nenul), deci rangul matricei A este 2.	2p
b)	Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat.	2p
	De exemplu, luând $z=\alpha$ necunoscută secundară se obţine $x=2\alpha-3$, $y=31-3\alpha, z=\alpha$	3p
c)	$x=2\alpha-3\geq 0, y=31-3\alpha\geq 0, z=\alpha\geq 0\Rightarrow$	1p
	$\dfrac{3}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{31}{3}$	2p
	$\alpha\in\{2,3,4,...,10\}$	1p
	Sunt 9 soluţii în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.	1p
2.a)	$a,b\in\mathbb{Z}_5$ şi card $\mathbb{Z}_5=5$.	2p
	Deci mulţimea A are 25 de elemente.	3p
b)	$\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{3}a-b & \hat{3}b+a\\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a\end{pmatrix}$	2p
	$\begin{pmatrix}\hat{3}a-b & \hat{3}b+a\\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ dacă $\hat{3}a=b$ şi $\hat{3}b=-a$.	1p
	Un exemplu: $M=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{3}\\ -\hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$.	2p
c)	Dacă $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ atunci $X^2=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x^2-y^2 & \hat{2}xy\\ -\hat{2}xy & x^2-y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\Leftrightarrow x^2-y^2=\hat{1}$ şi $xy=\hat{0}$	1p
	Dacă $x=\hat{0}\Rightarrow y^2=\hat{4}\Rightarrow y\in\{\hat{2};\hat{3}\}$; dacă $y=\hat{0}\Rightarrow x^2=\hat{1}\Rightarrow x\in\{\hat{1};\hat{4}\}$	2p
	Obţinem matricele $\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ -\hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{3}\\ -\hat{3} & \hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{4}\end{pmatrix}$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$	3p
	Deci $y=\dfrac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.	2p
b)	$f'(x)=\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$	2p
	$2x^2+2x+1>0$ pentru orice x real, deci $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	2p
	Funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(-1,+\infty)$.	1p
c)	$f''(x)=\dfrac{-2(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}, x\neq -1$	2p
	$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$	1p
	Din tabelul de variaţie rezultă că $x=-\dfrac{1}{2}$ este punctul de inflexiune al funcţiei f.	2p
2.a)	$I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=(2x-\ln x)\Big\vert_n^{n+1}=2-\ln\frac{n+1}{n}$	2p
	$I_{n+1}-I_n=\ln\dfrac{n+1}{n}-\ln\dfrac{n+2}{n+1}=$	1p
	$=\ln\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\ln\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este strict crescător.	2p
b)	$1<\dfrac{n+1}{n}\leq 2<e\Rightarrow 0<\ln\dfrac{n+1}{n}<1$	2p
	$1<2-\ln\dfrac{n+1}{n}<2$	2p
	$1<I_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit.	1p
c)	$\lim\limits_{n\to\infty}n(2-I_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\dfrac{n+1}{n}=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$	3p

Testul 10 Examen Bacalaureat, iunie 2010, subiect de rezervă

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(i\sqrt{2}-1\right)^2+2\left(i\sqrt{2}-1\right)+3=$	1p
	$=2i^2-2i\sqrt{2}+1+2i\sqrt{2}-2+3=$	2p
	$=0$	2p
2.	$f(g(x))=2(x^2-a)+a=$	2p
	$=2x^2-a$	1p
	$2x^2-a>0\Leftrightarrow a<0$	2p

3.	$\sqrt{(x-1)^2}=x+1$	**2p**
	$\|x-1\|=x+1$	**1p**
	$x=0$	**2p**
4.	0, 3, 6, 9,..., 2010 sunt în progresie aritmetică cu rația 3.	**2p**
	Numărul termenilor este 671.	**3p**
5.	Mijlocul segmentului $[BC]$ este $M(2,1)$.	**2p**
	Ecuația medianei este $y=4x-7$.	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{cases}x+y=1\\x+z=-1\\y+z=0\end{cases}$	**2p**
	$S=\{(0,1,-1)\}$	**3p**
b)	$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -2 & 1\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$	**3p**
	Rang $A=2$.	**1p**
	Sistemul este compatibil, deoarece rang $\bar{A}=2$.	**1p**
c)	$\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\1 & 2a & 1\\2a & 1 & a+1\end{vmatrix}=-2(2a-1)(a-1)(a+1)$	**3p**
	$a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm1,\frac{1}{2}\right\}$	**2p**
2.a)	$x_1=2+i\Rightarrow x_2=2-i$	**1p**
	Folosind relațiile lui Viète, obținem $x_3=3-x_1-x_2=-1$.	**2p**
	$m=1, n=-5$	**2p**
b)	Restul este $r=X(m-3)+1-n$.	**3p**
	$m=3$ și $n=1$.	**2p**
c)	Presupunând prin absurd că $x_1\le0$, rezultă $x_1^3\le0, -3x_1^2\le0, mx_1\le0, -n<0$.	**3p**
	Adunând cele patru relații se obține $0=f(x_1)<0$, o contradicție.	**2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}=0$	**2p**

	Asimptota oblică este $y=x$.	**1p**
b)	$x^3-3x+2=(x+1)^2(x+2)$	**1p**
	$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}$	**1p**
	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\infty$	**2p**
	Deci f nu e derivabilă în -2.	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln(x^3-3x^2+2)}{\ln x^3}=$	**2p**
	Finalizare: limita este egală cu 1.	**3p**
2.a)	Cu substituția $\sin x=t$ se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=$	**3p**
	$=\text{arctg}\,t\Big\|_0^1=\frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	Dacă funcția F este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	**2p**
	Cum $\cos x\in[-1,1], \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $F'(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\ge0, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	**2p**
	F este strict crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	**1p**
c)	$f(y)=f(2\pi-y)$	**1p**
	Cu substituția $x=2\pi-y$ se obține $I=\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(y)dy=$	**1p**
	$=2\pi\int_0^{2\pi}f(y)dy-I$	**1p**
	$\int_0^{2\pi}f(y)dy=0$	**1p**
	Deci $I=0$	**1p**

Testul 11 Examen Bacalaureat, august 2010

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{48}$	**2p**
	$3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}$	**2p**
	$2\sqrt[3]{6}<3\sqrt[3]{3}$	**1p**
2.	$\|x\|\ge0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \text{Im} f\subset[0,+\infty)$	**2p**
	$x\ge0\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow[0,+\infty)\subset\text{Im} f$	**2p**
	$\text{Im} f=[0,+\infty)$	**1p**
3.	$\Delta=1-4m^2$	**2p**

	Ecuația are două soluții egale $\Leftrightarrow \Delta = 0$	1p
	$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$	2p
4.	$T_{k+1} = C_{41}^{k}\sqrt[4]{2^k} = C_{41}^{k}2^{\frac{k}{4}}$	2p
	$T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 4$ divide k.	1p
	Sunt 11 termeni raționali.	2p
5.	$m_{AB} = m_{CD}$	1p
	$m_{AB} = -\frac{1}{2}$ și $m_{CD} = \frac{a+3}{3}$	2p
	Finalizare: $a = -\frac{9}{2}$	2p
6.	$\sin^3 x + \cos^3 x = 1, x \in A$, numai pentru $x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$	3p
	$P = \frac{2}{5}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	1p
	$A^3 = aI_3$	2p
	$A^{2010} = \left(A^3\right)^{670} = a^{670}I_3$	2p
b)	$B_1 = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}$	2p
	$\det(B_1) = a(a-1)^2$	2p
	$\det(B_1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $a = 1$	1p
c)	$B_n = A^{n-1}B_1$	1p
	B_n inversabilă $\Leftrightarrow \det(B_n) \neq 0$	1p
	$\det B_n = a^n(a-1)^2$	2p
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$	1p
2.a)	$x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + m - 6$	1p
	Dacă $m = 6$, atunci oricare ar fi $x, y \in M$ rezultă că $x * y \neq \frac{3}{2}$, adică $x * y \in M$	2p
	Dacă $m \neq 6$, atunci $0 * \frac{2m-3}{6} = \frac{3}{2}$	1p
	Cum $0, \frac{2m-3}{6} \in M$ rezultă $0 * \frac{2m-3}{6} \notin M$, deci $m = 6$	1p
b)	Asociativitatea	1p
	Justificarea faptului că elementul neutru este 2	2p

	Justificarea faptului că pentru $x \in M$, există $x' = \frac{3x-4}{2x-3} \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = 2$	2p
c)	Verificarea relației $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in M$	3p
	Justificarea faptului că f este bijectivă.	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}, x \neq \pm\frac{1}{2}$	2p
	$f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$	2p
	$y + 2 = 0$	1p
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	3p
	$y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p
c)	$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 1 - \sqrt[3]{2n+1}$	2p
	$\lim\limits_{n \to \infty}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{-\sqrt[3]{2n+1}}\right]^{\frac{\sqrt[3]{2n}}{-\sqrt[3]{2n+1}}} =$	1p
	$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)} =$	1p
	$= e^{-1} = \frac{1}{e}$	1p
2.a)	$I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1}dx =$	2p
	$= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$	3p
b)	$0 \le x \le 1 \Rightarrow x^n \ge x^{n+1}$	1p
	$x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	$\frac{x^n}{x^2+x+1} \ge \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow I_n \ge I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul este descrescător	2p
c)	$x^2 + x + 1 \ge 1, \forall x \ge 0 \Rightarrow 0 \le \frac{x^n}{x^2+x+1} \le x^n, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$	2p
	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	1p

Testul 12 Bacalaureat 2010, Model MECTS (www.edu.ro)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	2p

	$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6}\right) = -2^6 \Rightarrow \operatorname{Re} z^6 = -64$	3p
2.	$f(512) = \frac{1}{8}$	2p
	$(f \circ f)(512) = f\left(\frac{1}{8}\right) = 2$	3p
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, cu soluțiile $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $\sin x = 1$.	3p
	Obținem $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ □i $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.	2p
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii *M*.	3p
	Acesta este $C_6^3 = 20$.	2p
5.	Punctul $A(0,3)$ se află pe prima dreaptă.	2p
	Distanța este $d(A,d_2) = \frac{\lvert 2\cdot 0 + 4\cdot 3 - 11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$	3p
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2$	3p
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\cdot 2\cdot\cos 60^0 = 1$	1p
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 1 + 2^2 = 5$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$	2p
	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde rezultă concluzia	3p
b)	Observăm că $x=0, y=1, z=0$ verifică sistemul.	3p
	Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	2p
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a=b=c$	2p
	Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta, z=1-\alpha-\beta$.	2p
	Putem lua $\beta = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha}\right)$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1 \le 0$.	1p
2.*a)*	a,b,c pot lua fiecare 4 valori	3p
	Avem $4^3 = 64$ matrice.	2p
b)	Luăm $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$	3p
	$\det(A) = \hat{2}, \det(A^2) = \hat{0}$	2p
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$	2p
	Ecuația devine $a^2 = \hat{1}, b(a+c) = \hat{0}, c^2 = \hat{0}$.	1p
	Obținem $a \in \{\hat{1},\hat{3}\}, c \in \{\hat{0},\hat{2}\}, b = \hat{0}$, deci există 4 soluții.	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow m = 1$	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = 0$, deci avem asimptota oblică $y = x$.	3p
b)	$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$	3p
	$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	2p
c)	$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$	3p
	$f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty,-1)$, deci *f* este concavă pe $(-\infty,-1)$.	2p
2.*a)*	$\int_0^\pi \lvert\sin 2x\rvert dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx$	2p
	$I = \left.\frac{-\cos 2x}{2}\right\rvert_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{\cos 2x}{2}\right\rvert_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$	2p
	$I = 2$	1p
b)	$I_n = \int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx \le \int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx$	3p
	$\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx = \ln x\rvert_\pi^{2\pi} = \ln 2$	2p
c)	$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$	1p
	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt + \ldots + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$	2p
	$I_n \ge \frac{1}{\pi(n+1)}\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\lvert\sin t\rvert dt + \frac{1}{\pi(n+2)}\int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi}\lvert\sin t\rvert dt + \ldots + \frac{1}{2n\pi}\int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi}\lvert\sin t\rvert dt$	1p
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\lvert\sin t\rvert dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	1p

Tema 4.2 Variante de subiecte propuse spre rezolvare

Testul 1

Subiectul I

1. $a_5+a_{11}=a_1+4r+a_1+10r=2a_1+14r=2(a_1+7r)=2a_8$. Deci $a_8=10$.

2. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3g(x)+2=2(2x+a)+2=6x+3a+2$ și $(g\circ f)(x)=6x+4+a$. Rezultă că $3a+2=a+4$, deci $a=1$. **3.** Pentru $x>0$, avem $9^{\log_3 x}=x^{\log_3 9}=x^2$, deci ecuația se scrie $2x^2=8\Leftrightarrow x^2=4$, deci $x=2$, deoarece $x>0$. **4.** Numărul submulțimilor nevide este $2^5-1=31$. Numărul submulțimilor cu 2, 3 sau 5 elemente este $C_5^2+C_5^3+C_5^5=21$. Probabilitatea este $\frac{21}{31}$.

5. $\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2+m^2}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}>0$, deci unghiul vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este ascuțit.

6. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$.

Subiectul II

1. *a)* Fie $A=\begin{pmatrix}4&2\\-2&-1\end{pmatrix}$. Cum $A^2=\begin{pmatrix}4&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&6\\-6&-3\end{pmatrix}=3A$, rezultă că $A\in M$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M$. Dacă $\det(X)\neq 0$, rezultă că X e inversabilă și, din $X^2=3X$, rezultă $X=3I_2$, deci $a+d=3+3=6$. Dacă $\det(X)=0$, atunci $X^2=(a+d)X$. Cum $X^2=3X$ rezultă că $(a+d)X=3X$, dacă $(a+d-3)X=O_2$.
Obținem $a+d-3=0$ sau $X=O_2$. Rezultă că $a+d=3$ sau $a+d=0$, deci $a+d\in\{0,3,6\}$.

c) Dacă $X,Y\in M$, rezultă că $X^2+Y^2=3(X+Y)$. Cum $X+Y\in M$, obținem: $(X+Y)^2=3(X+Y)$, deci $(X+Y)^2=X^2+Y^2$. Rezultă $X^2+Y^2+XY+YX=X^2+Y^2$, deci $XY=-YX$.

2. *a)* $x*y=\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}$, $x,y\in(0,\infty)$. Avem $(x*y)*z=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}*z=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}$ și $x*(y*z)=x*\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}$, deci legea „*" este asociativă.

b) Dacă $e\in(0,\infty)$ ar fi element neutru al legii „*", atunci $1*e=1$, deci $\frac{e}{e+1}=1$, de unde $e=e+1$. Rezultă $0=1$, fals. Deci „*" nu are element neutru.

c) $x*x*x*x=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{x}\right)^{-1}=\frac{x}{4}$. Ecuația devine $\frac{x}{4}=5$, deci $x=20$.

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}=1$, deci dreapta de ecuație $y=-x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}-2=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-2=\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}-2<1-2=-1<0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x-x-1$. Cum $g'(x)=e^x-1$ și $g'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru $x\in(0,\infty)$, din monotonia lui g rezultă că $g(x)>g(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, deci $e^x>x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$. Cum f este strict descrescătoare, rezultă că $f(e^x)<f(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

2. *a)* $I_1=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=\int_0^\pi(e^x)'\cos x\,dx=e^x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi e^x\sin x=-e^\pi-1+\int_0^\pi e^x\sin xdx=-e^\pi-1+e^x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=-e^\pi-1-I_1$. Rezultă că $2I_1=-e^\pi-1$, deci $I_1=-\frac{e^\pi+1}{2}$.

b) $|I_n|=\left|\int_0^\pi e^x\cos x\,dx\right|\le\int_0^\pi|e^x\cos x|\,dx=\int_0^\pi e^x|\cos nx|\,dx\le\int_0^\pi e^x dx=e^x\Big|_0^\pi=e^\pi-1<3^4-1=80$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Deoarece $I_n=\int_0^\pi e^x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=\frac{e^x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi e^x\frac{\sin x}{n}\,dx=-\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x\sin nx\,dx$, rezultă că $|I_n|=\frac{1}{n}\left|\int_0^\pi e^x\sin nx\,dx\right|\le\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x|\sin nx|\,dx\le\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x dx\le\frac{1}{n}(e^\pi-1)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Testul 2

Subiectul I

1. Fie q rația progresiei. Atunci $a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)$ și $a_4+a_5+a_6=a_1(q^3+q^4+q^5)=a_1q^3(1+q+q^2)$. Obținem $\frac{a_1q^3(1+q+q^2)}{a_1(1+q+q^2)}=8$, deci $q^3=8$, de unde $q=2$.

2. $f(-x)=\ln\frac{-x-3}{-x+3}=\ln\frac{x+3}{x-3}=\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{-1}=-\ln\frac{x-3}{x+3}=-f(x)$, $\forall x\in D_f$, deci f este impară.

3. Sistemul de condiții $\begin{cases}3x-2\ge 0\\1-2x\ge 0\end{cases}$ conduce la $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cap\left[\frac{2}{3},\infty\right)=\varnothing$, deci ecuația nu are soluții.

4. Dacă $n\ge 5$, rezultă că $n!+(n+1)!\ge 5!+6!=120+720=840$, deci orice valoare a lui n care verifică ipoteza aparține mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$. Dacă $n\in\{0,1,2,3,4\}$, atunci $n!+(n+1)\le 4!+5!=24+120<840$, deci soluțiile sunt 0, 1, 2, 3 și 4. **5.** $3\vec{u}-\vec{v}=3(2\vec{i}-3\vec{j})-(4\vec{i}+\vec{j})=2\vec{i}-10\vec{j}$. Atunci $|3\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{4+100}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$. **6.** Din $\sin^2x+\cos^2x=1$, rezultă $\cos^2x=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$. Cum $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, avem $\cos x<0$, deci $\cos x=-\frac{12}{13}$. Rezultă că $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=-5$.

Subiectul II

1. *a)* $AB=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&8\\4&-9\end{pmatrix}$. Cum $\det(AB)=-5\neq 0$, rezultă că AB este inversabilă și

$(AB)^{-1}=\frac{1}{\det(AB)}\cdot(AB)^*=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-9&-8\\-4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}&\frac{8}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

b) $A+xB=\begin{pmatrix}2-x&-1+3x\\-1+x&3-2x\end{pmatrix}$, deci $\det(A+xB)=(2x-3)(x-2)-(3x-1)(x-1)=2x^2-7x+6-3x^2+4x-1=-x^2-3x+5$. Avem $\det(A+xB)=0\Leftrightarrow x^2+3x-5=0$ cu soluțiile $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$.

c) $A+B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=I_2+E$, unde $E=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$. Cum $E^2=O_2$ şi $I_2\cdot E=E\cdot I_2=E$, rezultă din formula binomului lui Newton că $(A+B)^n=(I_2+E)^n=I_2+C_n^1E=I_2+nE$. Dacă există $n\in\mathbb{N}$ cu $(A+B)^n=I_2$, rezultă că $I_2+nE=I_2$, deci $nE=O_2$. Rezultă $n=0$, fals.

2. a) Avem $x*y=3(x+1)(y+1)-1$, $x,y\in\mathbb{Z}$. Fie $x,y\in H$, $x=3k+2$, $y=3p+2$, $k,p\in\mathbb{Z}$. Rezultă că $x*y=3(3k+3)(3p+3)-1=27(k+1)(p+1)-1=3s-1$ unde $s=9(k+1)(p+1)$. Cum $x*y=3(s-1)+2$ şi $s-1\in\mathbb{Z}$, rezultă că $x*y\in H$. **b)** Dacă legea „*" ar admite elementul neutru $e\in\mathbb{Z}$, atunci $1*e=1$, deci $6(e+1)-1=1$, de unde $3(e+1)=1$. Rezultă că 3 divide 1, fals. Deci „*" nu are element neutru. **c)** Avem $(x*x)*x=[3(x+1)^2-1]*x=9(x+1)^3-1$. Atunci $(x*x)*x=8\Leftrightarrow 9(x+1)^3-1=8\Leftrightarrow(x+1)^3=1\Leftrightarrow x=0$.

Subiectul III

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac1x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac1x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac1x}-1}{\frac1x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{e^x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty$. Rezultă că g nu e derivabilă în 0 şi $g'(0)=\infty$.

c) $f(-1)+f(-2)+...+f(-n)+n=\frac1e-1+\frac1{e^2}-1+...+\frac1{e^n}-1+n=\frac1e+\frac1{e^2}+...+\frac1{e^n}=\frac1e\cdot\frac{1-\frac1{e^n}}{1-\frac1e}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac1{e^n}=0$, rezultă că limita cerută este $\frac1{e-1}$.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1=\sqrt2-1$.

b) Fie $x\in[0,1]$. Atunci $1\le\sqrt{x^2+1}\le\sqrt2$, deci $\frac1{\sqrt2}\le\frac1{\sqrt{x^2+1}}\le1$. Cum $\frac1{\sqrt2}x^n\le\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\le x^n$ pentru orice $x\in[0,1]$, rezultă că $\frac1{\sqrt2}\int_0^1x^n\,dx\le I_n\le\int_0^1x^n\,dx$. Cum $\int_0^1x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{x+1}\Big|_0^1=\frac1{n+1}$, rezultă concluzia.

c) $I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1x^n\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1x^n(\sqrt{x^2+1})'dx=x^n\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\int_0^1nx^{n-1}\sqrt{x^2+1}\,dx=$

$=\sqrt2-n\int_0^1x^{n-1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt2-n\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\sqrt2-n(I_{n+1}+I_{n-1})$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}I_{n+1}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}n(I_{n+1}+I_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt2-I_{n+1})=\sqrt2$.

Testul 3

Subiectul I

1. a) $(1+i)^5=(1+i)^4\cdot(1+i)=(2i)^2(1+i)=-4(1+i)\Rightarrow z=\frac{32}{-4(1+i)}=-\frac{8}{(1+i)}=-4+4i\Rightarrow \text{Re}\,z=-4$.

▪ M. ANDRONACHE • D. ŞERBĂNESCU • M. PERIANU • C. CIUPALĂ • F. DUMITREL

306

2. Cum $\text{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a},\infty\right)=\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),\infty\right)=[f(2),\infty)=[a-4,\infty)$, rezultă $a-4=3\Leftrightarrow a=7$.

3. $\sin x-\cos x=\frac1{\sqrt2}\Leftrightarrow\frac1{\sqrt2}\sin x-\frac1{\sqrt2}\cos x=\frac12\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac\pi4\right)=\frac12\Leftrightarrow x-\frac\pi4\in\left\{(-1)^k\cdot\frac\pi6+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb Z\right\}$.

Rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\left\{(-1)^k\cdot\frac\pi6+\frac\pi4+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb Z\right\}\cap[0,2\pi)=\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right\}$.

4. Deoarece $f(-1)=f(1)$ şi $f(-2)=f(2)$, rezultă că numărul cerut este egal cu numărul funcţiilor de la $\{0,1,2\}$ în $\{1,2,3\}$, deci $3^3=27$.

5. Prelungim semidreapta $(DC$ cu $CC'=DC$. Cum $ACC'B$ este paralelogram rezultă că $\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{AM}$, unde M este mijlocul lui BC. Atunci $|\overline{AB}+\overline{AC}|=|2\overline{AM}|$, unde M este mijlocul lui BC. Atunci $|\overline{AB}+\overline{AC}|=|2\overline{AM}|=2AM=2\sqrt{1+\frac14}=\sqrt5$.

6. $S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{24\sqrt3}{4}=6\sqrt3$. Din teorema cosinusului rezultă că $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=16+36-24=28$, deci $BC=2\sqrt7$. Obţinem $h_A=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{12\sqrt3}{2\sqrt7}=6\sqrt{\frac37}$.

Subiectul II

1. a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^3&b^3-a^3&c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\b^2+ab+a^2&c^2+ac+a^2\end{vmatrix}=$

$=(b-a)(c-a)(c^2+ac-b^2-ab)=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

b) Dacă $\text{rang}(A)=1$ rezultă că $\begin{vmatrix}1&1\\a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\a&c\end{vmatrix}=0$, dacă $b-a=c-a=0$, de unde $a=b=c$. Pentru $a=b=c$, rezultă $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&a&a\\a^3&a^3&a^3\end{pmatrix}$. Cum toţi minorii de ordinul 2 sunt 0 şi $A\ne O_3$, rezultă $\text{rang}A=1$.

c) Presupunem că A^{-1} are toate elementele întregi. Cum $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=\det(A\cdot A^{-1})=\det I_3=1$ şi $\det A\in\mathbb Z$, rezultă că $\det A\in\{-1,1\}$. Atunci $c-b$, $c-a$, $b-a\in\{-1,1\}$. Obţinem $a=b$ sau $a=c$ sau $b=c$, deci $\det(A)=0$, fals.

2. a) Cum ε este soluţia ecuaţiei $x^2-x+1=0$, rezultă că $\varepsilon^2-\varepsilon=-1$, deci $(z_1+\varepsilon)(z_2+\varepsilon)-\varepsilon=z_1z_2+\varepsilon z_1+\varepsilon z_2+\varepsilon^2-\varepsilon=z_1z_2+\varepsilon z_1+\varepsilon z_2-1=z_1*z_2$.

b) Fie $G=\mathbb C\setminus\{-\varepsilon\}$ şi $z_1,z_2\in G$. Cum $z_1+\varepsilon\ne0$, $z_2+\varepsilon\ne0$ rezultă că $(z_1+\varepsilon)(z_2+\varepsilon)\ne0$, deci $z_1*z_2\in G$. Rezultă că „*" este lege bine definită pe G. Vom verifica axiomele grupului:

- Avem $(z_1*z_2)*z_3=[(z_1+\varepsilon)(z_2+\varepsilon)-\varepsilon]*z_3=(z_1+\varepsilon)(z_2+\varepsilon)(z_3+\varepsilon)-\varepsilon$ şi $z_1*(z_2*z_3)=z_1*[(z_2+\varepsilon)(z_3+\varepsilon)-\varepsilon]=(z_1+\varepsilon)(z_2+\varepsilon)(z_3+\varepsilon)-\varepsilon=(z_1*z_2)*z_3$, $\forall z_1,z_2,z_3\in G$, deci legea „*" e asociativă.
- $e\in G$ este element neutru $\Leftrightarrow z*e=e*z=z$, $\forall z\in G\Leftrightarrow(z+\varepsilon)(e+\varepsilon)-\varepsilon=z$, $\forall z\in G\Leftrightarrow(z+\varepsilon)(e+\varepsilon)=z+\varepsilon$, $\forall z\in G\Leftrightarrow e+\varepsilon=1\Leftrightarrow e=1-\varepsilon$. Cum $1-\varepsilon\in G$, rezultă că $e=1-\varepsilon$ este elementul neutru al legii „*".
- Fie $z\in G$, z este simetrizabil $\Leftrightarrow\exists z'\in G$ astfel încât $z*z'=z'*z=e\Leftrightarrow(z+\varepsilon)(z'+\varepsilon)-\varepsilon=1-\varepsilon\Leftrightarrow(z+\varepsilon)(z'+\varepsilon)=1$. Cum $z+\varepsilon\ne0$ rezultă că $z'=-\varepsilon+\frac1{z+\varepsilon}\in G$, deoarece $\frac1{z+\varepsilon}\ne0$. Rezultă că toate elementele G sunt simetrizabile.

c) Avem $H=\{z\in\mathbb C\mid|z+\varepsilon|=1\}$. Fie $z_1,z_2\in H$. Atunci $|(z_1*z_2)+\varepsilon|=|(z_1+\varepsilon)(z_2+\varepsilon)-\varepsilon+\varepsilon|=|(z_1$

MATEMATICĂ – M1 ▪

307

$+ \varepsilon)(z_2 + \varepsilon)| = |z_1 + \varepsilon|\,|z_2 + \varepsilon| = 1$, deci $z_1 * z_2 \in H$. Fie $z \in H$. Din punctul ***b)*** rezultă că $z' = -\varepsilon + \dfrac{1}{z+\varepsilon}$, de unde $|z' + \varepsilon| = \left|\dfrac{1}{z+\varepsilon}\right| = \dfrac{1}{|z+\varepsilon|} = 1$. Obținem că $z' \in H$, deci H este subgrup al lui G.

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x^2}+1)}$, $x \in (-1, 1)$.

Cum $f'(x) \le 0$, $\forall x \in (-1, 1)$ și $f' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-1, 1)$. Cum f este continuă în 1 și -1, rezultă că f este strict descrescătoare pe $[-1, 1]$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \arcsin x}{x^3}$. Aplicăm teorema lui L'Hôspital în cazul $\dfrac{0}{0}$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{3\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)} = -\dfrac{1}{6}$ rezultă că limita cerută este $-\dfrac{1}{6}$.

c) $f''(x) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\left((1-x^2)^{-1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Rezultă că $f''(x) > 0$ pentru $x \in (-1, 0)$ și $f''(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$. Cum f este continuă în 0, rezultă că 0 este unicul punct de inflexiune a graficului lui f.

2. ***a)*** $A = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Cum $\dfrac{2-x}{2+x} \le 1$ pentru $x \in [0, 1]$ rezultă că $f(x) \le 0$ pentru $x \in [0, 1]$, deci $A = -\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \ln(2+x)\,dx - \int_0^1 \ln(2-x)\,dx = \int_0^1 x'\ln(2+x)\,dx - \int_0^1 x'\ln(2-x)\,dx =$

$= x\ln(2+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x\,dx}{x+2} - x\ln(2-x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \dfrac{x\,dx}{x-2} = \ln 3 + \int_0^1 x\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)dx = \ln 3 + \int_0^1 \dfrac{4x}{x^2-4}\,dx =$

$= \ln 3 + 2\ln\left|x^2 - 4\right|\Big|_0^1 = \ln 3 + 2\ln\dfrac{3}{4} = \ln\dfrac{27}{16}$.

b) Cum $f(-x) = \ln\dfrac{2+x}{2-x} = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{2-x}{2+x} = -f(x)$, $\forall x \in (-2, 2)$, rezultă că f este impară, deci $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$.

c) Aplicând teorema lui L'Hôspital în cazul $\dfrac{0}{0}$ obținem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{2-x}{2+x}}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{-2x}{2+x}\right)}{-\dfrac{2x}{2+x}}\cdot\dfrac{-1}{2+x} = -\dfrac{1}{2}$. Deci limita cerută este $-\dfrac{1}{2}$.

Testul 4

Subiectul I

1. Cum $2 = \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 = 3 < \log_2 9 < \log_2 16 = 4$, rezultă că mulțimea dată are un singur element, $x = 3$. **2.** Avem $y \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow$ ecuația $yx^2 - x + y = 0$ are

soluții reale $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow 1 - 4y^2 \ge 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, deci $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

3. Avem succesiv: $\sin x\cos x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, deci $x \in \left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Cum $x \in [0, 2\pi)$, obținem soluțiile $\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}\right\}$.

4. Numărul numerelor naturale de 4 cifre este $9\cdot 10^3$, iar cel al multiplilor de 5 din această mulțime este $9\cdot 10^2\cdot 2$. Probabilitatea este $\dfrac{1}{5}$. **5.** Avem $\overrightarrow{BA}(3, 2)$ și $\overrightarrow{BC}(-2, 3)$. Cum $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0$, rezultă $\cos(\widehat{ABC}) = 0$. **6.** Fie $AB = 2c$, $AC = 2b$, $BC = 2a$. Atunci $R = a$ și $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2bc}{a+b+c}$. Avem:

$2(R+r) = 2\left(a + \dfrac{2bc}{a+b+c}\right) = 2\dfrac{a^2+ab+ac+2bc}{a+b+c} = 2\dfrac{b^2+c^2+ab+ac+2bc}{a+b+c} = 2\dfrac{(b+c)^2+a(b+c)}{a+b+c} =$

$= 2(b+c) = AB + AC$.

Subiectul II

1. ***a)*** $\det(A) = 0$. Cum $A \ne O_2$ rezultă că $\operatorname{rang}(A) = 1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = A$. Vom demonstra prin inducție că $A^n = A$, $\forall n \ge 1$. Cum $P(1)$ și $P(2)$ sunt adevărate, presupunem că $A^n = A$. Atunci $A^{n+1} = A^n\cdot A = A\cdot A = A^2 = A$, deci $P(n)$ este adevărată $\forall n \ge 1$. În concluzie $A^{2012} = A$.

c) Cum $I_2 \cdot (3A) = (3A)\cdot I_2$, folosind binomul lui Newton obținem $(I_2 + 3A)^n =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\cdot I_2^{n-k}\cdot(3A)^k = I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\cdot 3^k\cdot A = I_2 + A\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k 3^k - 1\right) = I_2 + A[(1+3)^n - 1] =$

$= I_2 + (4^n - 1)A$.

2. ***a)*** Fie (a, b) și $(x, y) \in G$. Atunci $(a, b) * (x, y) = (ax + 2by, ay + bx)$. Cum $\alpha = ax + 2by \in \mathbb{Z}$, $\beta = ay + bx \in \mathbb{Z}$ și $\alpha^2 - 2\beta^2 = (ax+2by)^2 - 2(ay+bx)^2 = a^2x^2 + 4b^2y^2 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 = (a^2 - 2b^2)(x^2 - 2y^2) = 1\cdot 1 = 1$ rezultă că $(a, b) * (x, y) \in G$. Cum $(1, 0) \in G$ rezultă că $G \ne \varnothing$ și de aici concluzia.
b) Din punctul a) rezultă că „$*$" este lege pe G. Cum $(a, b) * (1, 0) = (a, b) = (1, 0) * (a, b)$, $\forall (a, b) \in G$, rezultă că „$*$" are pe G elementul neutru $(1, 0)$. ***c)*** Fie $x_1 = (3, 2)$. Cum $9 - 2\cdot 4 = 1$ rezultă că $x_1 \in G$. Notăm cu $x_2 = x_1 * x_1$, $x_3 = x_2 * x_1$ și inductiv $x_{n+1} = x_n * x_1$. Cum „$*$" este lege pe G rezultă că $x_n \in G$, $\forall n \ge 1$. Dacă $x_n = (a_n, b_n)$, atunci cum $x_{n+1} = (a_n, b_n) * (3, 2) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$ rezultă că $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ și $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Cum $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, rezultă că $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \ge 1$ și $a_{n+1} > a_n$. Rezultă $x_n \ne x_m$ $\forall n \ne m$, deci mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este infinită.

Subiectul III

1. ***a)*** Fie A punctul de pe graficul lui f, de abscisa 3. Cum $f(3) = 27 + 1 = 28$, rezultă că A are coordonatele $(3, 28)$. Cum $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3}$ și $f'(3) = 27 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{82}{3}$, rezultă că ecuația tangentei în A este $y - 28 = \dfrac{82}{3}(x - 3)$. Deci, ecuația tangentei este $82x - 3y - 162 = 0$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)} - \sqrt[k]{f(0)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[k]{x^3 + \frac{x}{3}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[k]{\dfrac{x^3 + \frac{x}{3}}{x^k}} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[k]{\dfrac{x^2 + \frac{1}{3}}{x^{k-1}}} = +\infty$, deoarece $k - 1$ este număr par; rezultă că $g'(0) = \infty$, deci g nu e derivabilă în 0.

c) Deoarece $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare. Arătăm prin inducție că

șirul $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător. Avem $x_1 = 1+\frac{1}{3} > x_0 = 1$. Presupunem că $x_n > x_{n-1}$. Cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x_n) > f(x_{n-1})$, deci $x_{n+1} > x_n$. Dacă $(x_n)_n$ e mărginit, atunci $x_n \to l \in \mathbb{R}$. Cum $x_{n+1} = x_n^3 + \frac{x_n}{3}$, rezultă că $l = l^3 + \frac{l}{3} \Leftrightarrow 3l^3 = 2l \Leftrightarrow l \in \left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$. Deoarece $(x_n)_n$ este strict crescător, rezultă că $x_n < l$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $x_n < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, $\forall n \ge 0$, fals. Deci $(x_n)_n$ este nemărginit și fiind crescător, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2. a) $I_1 = \int_0^1 x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac12\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac12\int_0^1 (x^2+1)^{1/2}\cdot(x^2+1)'\,dx = \frac13(x^2+1)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac13(2\sqrt2-1)$.

b) Cum $I_{n+1}-I_n = \int_0^1 (x^{n+1}\sqrt{x^2+1} - x^n\sqrt{x^2+1})\,dx = \int_0^1 x^n\sqrt{x^2+1}\,(x-1)\,dx \le 0$, deoarece $x^n\sqrt{x^2+1}\ge0$ și $x-1\le0, \forall x\in[0,1]$, rezultă că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător, deci mărginit superior. Cum $x^n\sqrt{x^2+1}\ge 0, (\forall)x\in[0,1]$ rezultă că $I_n\ge0, \forall n\ge1$, deci șirul $(I_n)_n$ este mărginit.

c) Cum $0\le x^n\sqrt{x^2+1}\le\sqrt2\, x^n, \forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*$, avem $0\le I_n\le\int_0^1\sqrt2x^n\,dx = \sqrt2\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt2}{n+1}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt2}{n+1}=0$, din teorema cleștelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Testul 5

Subiectul I

1. a) Avem $\frac{z+i}{1+iz}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a+(b+1)i}{1-b+ai}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{[a+(b+1)i](1-b-ai)}{(1-b)^2+a^2}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (b+1)(1-b) - -a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$, unde $z=a+bi$. Obținem $|z|^2=1$, deci $|z|=1$.

2. $f=f^{-1}\Leftrightarrow (f\circ f)(x) = x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x+a)=x \Leftrightarrow x+a+a = x, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde $a=0$.

3. Ecuația se scrie $\sin x = 1-2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2x+\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \sin x = \frac12$ sau $\sin x = -1$, deci $x\in\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Numărul numerelor naturale de trei cifre este 900, iar numărul celor cu toate cele trei cifre pare este 100. Deci numărul cerut este 800.

5. $d(P,d_1)=\frac{|-3a+1|}{\sqrt{10}}$, iar $d(P,d_2)=\frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$. Atunci $d(P,d_1)=d(P,d_2)\Leftrightarrow |-3a+1|=|a+2| \Leftrightarrow -3a+1 = a+2$ sau $-3a+1=-a-2 \Leftrightarrow a=-\frac14$ sau $a=\frac32$. Deci $a\in\left\{-\frac14,\frac32\right\}$.

6. Avem $\sqrt3 = \frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}\Leftrightarrow AC = \frac{\sqrt3}{\sin A}=2$, deci triunghiul ABC este echilateral. Rezultă $BC = 2$.

Subiectul II

1. a) Cum $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ și $\Delta_p = \begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix} = 2\ne0$, rezultă că rangul lui B este 2, $\forall m\in\mathbb{R}$.

b) $AB=\begin{pmatrix}1&-2\\2+m&7\end{pmatrix}$. Atunci $\det(AB)=11+2m$. Rezultă că $m=-\frac{11}{2}$.

c) Fie $X=(a\ \ b)$; $X\cdot A = (1\ \ 2\ \ 8)\Leftrightarrow a+2b=1, b=2, -2a+b=8 \Leftrightarrow a=-3, b=2 \Rightarrow X=(-3\ \ 2)$.

2. a) Avem $e*x=x, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow ex+ae+x=x, (\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e(x+a)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e=0$. Deci singurul număr cu proprietatea din enunț este 0.

b) Legea „*" are element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow xe+ax+e=x$ și $ex+ae+x=x, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x(e+a-1)+e=0$ și $ex+ae=0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e=0$ și $e+a-1=0\Leftrightarrow a=1$.

c) Pentru $a = 1$ avem $x*y = xy+x+y = (x+1)(y+1)-1$. Atunci $(x*x)*(x*x)=15 \Leftrightarrow ((x+1)^2-1)*((x+1)^2-1)=15\Leftrightarrow (x+1)^4-1=15 \Leftrightarrow (x+1)^4=16\Leftrightarrow x+1=2$ sau $x+1=-2$, deci $x = 1$ sau $x = -3$.

Subiectul III

1. a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\operatorname{tg}x}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}x - x}{x^2}$. Aplicând teorema lui l'Hôspital, cazul $\frac00$, obținem: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{2x\cos^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{2x\cos^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0$, deci f este derivabilă în 0 și $f'(0)=0$.

b) Pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem $f'(x)=\frac{\frac{x}{\cos^2x}-\operatorname{tg}x}{x^2} = \frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x}=\frac{2x-\sin2x}{2x^2\cos^2x}$.

Fie $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-\sin 2x$. Cum $g'(x)=2-2\cos2x=2(1-\cos2x)>0, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că g este strict crescătoare pe $\left(0,\frac\pi2\right)$, deci $g(x)>\lim\limits_{t\searrow0}g(t)=0$, $\forall x\in\left(0,\frac\pi2\right)$. Cum $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(0,\frac\pi2\right)$ și $f'(0)=0$ rezultă că f este strict crescătoare pe $[0,\frac\pi2)$, deci este injectivă. Deoarece $f(0) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\pi/2}f(x)=\infty$, din continuitatea lui f rezultă că $\operatorname{Im} f = [1, \infty)$, deci f este surjectivă.

c) Cum $\lim\limits_{x\to\frac\pi2}f(x)=\infty$ și f este continuă și inversabilă rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}f^{-1}(x)=\frac\pi2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f^{-1}(n)=\frac\pi2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac\pi2$.

2. a) $I_1=\int_1^e x\ln dx = \int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac1x\,dx = \frac{e^2}{2}-\frac12\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{1+e^2}{4}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x\ln^n x(\ln x-1)\,dx\le0, \forall n\in\mathbb{N}^*$, deoarece $0\le\ln x\le1$, $\forall x\in[1,e]$. Rezultă că $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător, deci mărginit superior. Cum $x\ln^n x\ge0$, $\forall x\in[1,e]$, obținem $I_n\ge0,\ \forall n\ge1$, deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit.

c) $I_{n+1}=\int_1^0 x\ln^{n+1}x\,dx = \int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^{n+1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big|_1^e - \int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot(n+1)\ln^n x\cdot\frac1x\,dx = \frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx = \frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n$, deci $I_n=\frac{e^2}{n+1}-\frac{2}{n+1}\cdot I_{n+1}$. Cum șirul $(I_n)_n$ este mărginit și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Testul 6

Subiectul I

1. Avem $\left[\frac{x+1}{2}\right]=3 \Leftrightarrow 3 \le \frac{x+1}{2} < 4 \Leftrightarrow 5 \le x < 7 \Rightarrow A=[5,7)\cap\mathbb{Z}=\{5,6\}$, deci A are două elemente.

2. Fie $y\in[2,\infty)$. Atunci $f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2x+3=y \Leftrightarrow x^2-2x+3-y=0$. Cum $\Delta=4y-8\ge 0$, rezultă că $x=1\pm\sqrt{y-2}$. Cum $x\in[1,\infty)$ obținem $f^{-1}(y)=1+\sqrt{y-2}$. Ca urmare, inversa funcției f este $f^{-1}:[2,\infty)\to[1,\infty)$, $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}$. **3.** Ecuația se scrie $\arccos x+\frac{2\pi}{3}=\pi \Leftrightarrow \arccos x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. **4.** Numărul submulțimilor lui A este $2^5=32$, iar numărul submulțimilor care conțin elementul 1 este egal cu numărul submulțimilor lui $B=\{2,3,4,5\}$, adică $2^4=16$. Probabilitatea cerută este $\frac{1}{2}$. **5.** Cum $A\in d_1$ rezultă că $2+2a=4$, deci $a=1$. Din $A\in d_2$ rezultă că $b=1-2=-1$.

6. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=4 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=4 \Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=4 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}2x=2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1. *a)* Inversiunile lui σ sunt (2, 5), (3, 5) și (4, 5).

b) Avem $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&3&4\end{pmatrix}$ și $\sigma^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=e$. Fie $k,c\in\mathbb{Z}$ și $r\in\{0,1,2,3\}$ astfel încât $k=4c+r$. Atunci $\sigma^k=\sigma^{4c+r}=(\sigma^4)^c\cdot\sigma^r=\sigma^r$, deci $A=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$. În concluzie, A are 4 elemente.

c) Presupunem că $\sigma\tau=\tau\sigma$. Atunci $(\sigma\tau)(1)=(\tau\sigma)(1)\Rightarrow\sigma(\tau(1))=\tau(\sigma(1))\Rightarrow\sigma(i)=\tau(1)\Rightarrow\sigma(i)=i$, fals pentru ca singurul punct fix al lui τ este 1, iar $i\ge 2$.

2. *a)* De exemplu, $x=y=-\sqrt[3]{\frac{2012}{2}}$. Atunci $x^3=y^3=-1006$ și $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2012}=0\in\mathbb{N}$.

b) Din enunț, „$*$" este lege pe $\mathbb{R}$. Pentru asociativitate, fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ și avem $(x*y)*z=\sqrt[3]{x^3+y^3+2012}*z=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3+4024}=x*(y*z)$.

Deoarece $x*\sqrt[3]{-2012}=\sqrt[3]{-2012}*x=\sqrt[3]{x^3-2012+2012}=x$ rezultă că $e=-\sqrt[3]{2012}$ este elementul neutru al legii „$*$". Fie $x\in\mathbb{R}$; din $x*x'=x'*x=e$ se obține $x'=-\sqrt[3]{4024+x^3}\in\mathbb{R}$, deci toate elementele lui $\mathbb{R}$ sunt simetrizabile. Ca urmare, $(\mathbb{R},*)$ este grup.

c) Fie $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},*)$, $f(x)=\sqrt[3]{x-2012}$. Cum $f(x)*f(y)=\sqrt[3]{x-2012}*\sqrt[3]{y-2012}=$ $\sqrt[3]{x+y-2012}=f(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ și f este bijectivă, rezultă că f este izomorfism.

Subiectul III

1. *a)* Deoarece $f(x)=\begin{cases}-\frac{\ln x}{x}, & x\in(0,1)\\ \frac{\ln x}{x}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ avem $f'(x)=\begin{cases}\frac{\ln x-1}{x^2}, & x\in(0,1)\\ \frac{1-\ln x}{x}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$, deci f este derivabilă pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$. Cum $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0=f(1)$, rezultă că f este continuă în $x_0=1$. Aplicăm corolarul lui Lagrange și obținem $\lim\limits_{x\nearrow1}f'(x)=-1$, deci $f'_s(1)=-1$ și $\lim\limits_{x\searrow1}f'(x)=1$, deci $f'_d(1)=1$. Rezultă că f nu e derivabilă în $x_0=1$.

b) Punctele de extrem ale lui f sunt 1 și e, așa cum se observă din tabloul de variație al lui f de mai jos:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	– –	– – –	|	+ + +	0	– – –	– –
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, $f(1)=0$, $f(e)=\frac{1}{e}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, din continuitatea lui f rezultă că ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale $\Leftrightarrow m\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

2. *a)* $A=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,\mathrm{d}x$. Cum $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}=\frac{e^{2x}-1}{e^x}<0$ pentru $x\in[-1,0]$, rezultă că $|f(x)|=-f(x)$, $\forall x\in[-1,0]$, deci $A=\int_{-1}^{0}(e^{-x}-e^x)\,\mathrm{d}x=-(e^{-x}+e^x)\Big|_{-1}^{0}=e^{-1}+e-2$.

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F''(x)=f'(x)=e^x+e^{-x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci F este funcție convexă.

c) Cu teorema lui L'Hôspital : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$.

Testul 7

Subiectul I

1. Avem $(1+\sqrt2)\{2012+\sqrt2\}=(1+\sqrt2)\{\sqrt2\}=(1+\sqrt2)(\sqrt2-[\sqrt2])=(1+\sqrt2)(\sqrt2-1)=1\in\mathbb{N}$.

2. Deoarece $f(1-x)=f(1+x)$ și $f(2-x)=f(2+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că $f(x+2)=f(2-x)=f(1-(x-1))=f(1+x-1)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este periodică, de perioadă 2. **3.** Ecuația se scrie $\cos^2x-\sin^2x=\frac12 \Leftrightarrow \cos2x=\frac12$. Cum $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x\in[0,\pi]$, deci $2x=\frac{\pi}{3}$. Rezultă $x=\frac{\pi}{6}$.

4. Pentru $k\ge2$ avem $A_5^k=\frac{5!}{(5-k)!}=5\cdot4\cdot\ldots\cdot(6-k)$, care este număr par. Cum $A_5^0=1$ și $A_5^1=5$, probabilitatea cerută este $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. **5.** Avem $2\overline{AM}-2\overline{BN}=\overline{AB}+\overline{AC}-(\overline{BA}+\overline{BC})=$ $2\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB}=2\overline{AB}+\overline{AB}=3\overline{AB}$. **6.** Cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, avem $\cos x<0$. Din $\cos^2x+\sin^2x=1$ rezultă $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2x}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$. Atunci $\operatorname{ctg}2x=\frac{\cos2x}{\sin2x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{2\sin x\cos x}=-\frac{119}{120}$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A(m)=-3m^2-m+1$.

b) $\det A(m)=0\Leftrightarrow 3m^2+m-1=0\Leftrightarrow m\in\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{6},\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}$. Cum $m\in\mathbb{Q}$, rezultă $\det A(m)\ne0$, deci $A(m)$ este inversabilă, pentru orice $m\in\mathbb{Q}$.

c) $A(0)=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&2&-3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Deoarece $B^2=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $B^3=O_3$,

rezultă că $B^k = O_3$ pentru orice $k \geq 3$. Ţinând cont că $I_3 \cdot B = B \cdot I_3$, avem:

$$(A(0))^n = (I_3 + B)^n = I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2-2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Observăm că putem scrie $x * y = x^{\frac{1}{2}\log_3 y} = x^{\log_9 y} = (9^{\log_9 x})^{\log_9 y} = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 y}$.

a) $x * y = 1 \Leftrightarrow 9^{\log_9 x \cdot \log_9 y} = 1 \Leftrightarrow \log_9 x \cdot \log_9 y = 0 \Leftrightarrow \log_9 x = 0$ sau $\log_9 y = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $y = 1$.

b) Cum $x * y = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 y} > 0$, $\forall x, y > 0$, din punctul ***a)*** rezultă că $x * y \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ pentru orice $x, y \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, deci „$*$" este lege de compoziţie bine definită pe $G = (0,\infty) \setminus \{1\}$. Verificăm în continuare axiomele grupului.

- Asociativitatea: pentru orice $x, y, z \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ avem $(x * y) * z = x * (y * z)$, deoarece:

$$(x * y) * z = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 y} * z = 9^{\log_9 (9^{\log_9 x \cdot \log_9 y}) \cdot \log_9 z} = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 y \cdot \log_9 z}$$

şi $\quad x * (y * z) = x * 9^{\log_9 y \cdot \log_9 z} = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 (9^{\log_9 y \cdot \log_9 z})} = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 y \cdot \log_9 z}$.

- Existenţa elementului neutru: Cum $x * 9 = 9^{\log_9 x \cdot \log_9 9} = x$ şi $9 * x = 9^{\log_9 9 \cdot \log_9 x} = x$, pentru orice $x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, rezultă că 9 este element neutru al legii „$*$".

- Simetrizabilitatea elementelor: Fie $x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$. Cum $x * x' = x' * x = e \Leftrightarrow 9^{\log_9 x \cdot \log_9 x'} = 9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x')^{\log_9 x} = 9 \Leftrightarrow x' = 9^{\frac{1}{\log_9 x}} = 9^{\log_x 9} \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, rezultă că toate elementele din G sunt simetrizabile.

c) $x * x * x = 3 \Leftrightarrow 9^{\log_9^3 x} = 3 \Leftrightarrow \log_9^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9 x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$.

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$, $\forall x \in [1, \infty)$. Cum $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci graficul lui f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$. Cum $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, rezultă că graficul lui f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

c) Din punctul ***a)*** rezultă că $f(x) > f(1) = 0$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci $\frac{1}{2}\ln x > \frac{x-1}{x+1}$, $\forall x \in (1, \infty)$. Rezultă că $\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y} > \frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1} = \frac{x-y}{x+y}$, pentru orice $x, y \in (0,\infty)$, $x > y$. Atunci $\frac{1}{2}\ln\frac{k+1}{k} > \frac{1}{2k+1}$, $\forall k \geq 1$, deci $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$, de unde $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2}\ln(n+1)$.

2. ***a)*** Aria suprafeţei este $\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}\,dx = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$ $= \ln t \,\Big|_1^e - \ln(t+1)\,\Big|_1^e = \ln e - \ln(e+1) + \ln 2 = \ln\frac{2e}{e+1}$.

b) $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 f(x)\,dx + \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 t^2 f(-t)\,dt + \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(f(-x) + f(x))\,dx =$

$= \int_0^1 x^2\left(\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x}\right)dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

c) Avem $\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x) = \int_0^1 x^{2n}(f(-x) + f(x))\,dx = \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1}$. Deci $\lim_{n\to\infty} n\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\,dx =$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Testul 8

Subiectul I

1. Ecuaţia $2z^2 + z + 2 = 0$ are soluţiile z şi $\overline{z}$. Cum $z \cdot \overline{z} = 1$, rezultă că $|z|^2 = 1$, deci $|z| = 1$.

2. Dacă $a \neq 0$, atunci f este funcţie de gradul II care nu este funcţie monotonă. Pentru $a = 0$, $f(x) = 2x + 3$, deci f este strict crescătoare.

3. Ecuaţia se scrie $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ sau $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$, deci soluţiile sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = \log_{2/3}2$.

4. Numărul funcţiilor strict monotone este $2C_n^2$. Atunci $2C_n^2 = 20 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20$, deci $n = 5$.

5. Fie $M(\alpha, \beta)$ piciorul perpendicularei din A pe dreapta $d: x - 2y + 5 = 0$. Cum $m_d \cdot m_{AM} = -1$ rezultă $\frac{\beta - 2}{\alpha - 1} = -2$, deci $2\alpha + \beta = 4$. Cum $M \in d$ avem $\alpha - 2\beta = -5$, de unde $\alpha = \frac{3}{5}$ şi $\beta = \frac{14}{5}$. Dacă A' este simetricul lui A faţă de dreapta d, atunci $x_{A'} = 2\alpha - x_A = \frac{1}{5}$ şi $y_{A'} = 2\beta - y_A = \frac{18}{5}$, deci $A'\left(\frac{1}{5}, \frac{18}{5}\right)$.

6. Presupunem că triunghiul este dreptunghic în A. Atunci $BC = 2R = 12$ şi $AC = 6$. Cum $AB = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$, rezultă că perimetrul ΔABC este $18 + 6\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. ***a)*** Inversiunile lui σ sunt (1, 2), (1, 3) şi (2, 3). Cum $m(\sigma) = 3$, rezultă că σ este permutare impară.

b) $\varepsilon(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(\sigma x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(x) = -1$ ceea ce demonstrează echivalenţa din enunţ.

c) Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow \sigma x = \sigma y \Rightarrow x = y$, deci f este funcţie injectivă. Fie p numărul permutărilor pare din S_4 şi q numărul celor impare. Deoarece f este injectivă şi duce orice permutare pară în una impară, rezultă că $p \leq q$. Cum f este injectivă şi duce orice permutare impară în una pară, rezultă $q \leq p$. Obţinem $p = q = \frac{24}{2} = 12$. Deci oricum înmulţim permutările din S_4 obţinem o permutare pară, deci produsul este diferit de σ.

2. ***a)*** Notând $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, avem $A(x) = E + xF$. Cum $E^2 = E$, $F^2 = 2F$ şi $EF = FE = F$, avem $A(x) \cdot A(y) = (E + xF)(E + yF) = E + (x + y + 2xy)F = A(2xy + x + y)$, care aparţine lui G, deoarece $2xy + x + y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$, pentru orice $x, y \neq -\frac{1}{2}$.

b) Din punctul ***a)*** înmulţirea matricelor este lege pe G. Înmulţirea matricelor este asociativă şi $A(x) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(x) = A(x)$, deci $A(0) \in G$ este element neutru. Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; atunci $A(x)$ este simetrizabilă dacă şi numai dacă există $x' \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(2xx'+x+x') = A(0) \Leftrightarrow x'(2x+1) = -x \Leftrightarrow x' = -\dfrac{x}{2x+1} \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Deci, $A(x)$ este element simetrizabil în G şi $(A(x))' = A\left(-\dfrac{x}{2x+1}\right)$.

c) Avem $f(x)\cdot f(y) = A\left(\dfrac{x-1}{2}\right)A\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = A\left(2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\right) = A\left(\dfrac{xy-1}{2}\right) = f(xy)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^*$, deci f este morfism.

Injectivitatea: dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x)=f(y) \Rightarrow A\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = A\left(\dfrac{y-1}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow x = y$.

Surjectivitatea: Fie $A \in G$. Atunci există $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ astfel încât $A = A(x)$. Cum $2x + 1 \neq 0$ şi $f(2x+1) = A\left(\dfrac{2x+1-1}{2}\right) = A(x) = A$, deci f este surjectivă. În consecinţă, f este izomorfism.

Subiectul III

1. ***a)*** Cum $x > 0$, avem $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$, deci $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)} > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x - \ln(x+1)}{\dfrac{1}{x}}$. Aplicăm teorema lui L'Hôspital în cazul $\dfrac{0}{0}$. Cum

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x(x+1)}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1}$, rezultă că limita cerută este -1.

c) Fie $x > 0$. Din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei $g : [x, x+1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \ln t$ rezultă că $\exists\, c \in (x, x+1)$ astfel încât $\ln(x+1) - \ln x = g'(c) = \dfrac{1}{c} \in \left(\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{x}\right)$. Atunci $\ln\dfrac{x}{x+1} \in \left(-\dfrac{1}{x}, -\dfrac{1}{x+1}\right)$, deci $-\dfrac{1}{x} < f(x) < -\dfrac{1}{x+1}$.

2. ***a)*** $I_1 = \int_0^1 x^2 \sin x\, dx = \int_0^1 x^2(-\cos x)'\, dx = -x^2\cos x\,\Big|_0^1 + 2\int_0^1 x\cos x dx = -\cos 1 + 2\cdot\int_0^1 x(\sin x)' dx =$
$= -\cos 1 + 2x\sin x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \sin x dx = -\cos 1 + 2\sin 1 + 2\cos x\Big|_0^1 = 2\sin 1 + \cos 1 - 2$.

b) Avem $0 \le \sin x \le \sin 1 < \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\forall x \in [0,1]$, deci $0 \le \int_0^1 x^{2n}\sin x\, dx \le \int_0^1 \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^{2n}\, dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{4n+2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $I_n = \int_0^1 \left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' \sin x\, dx = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin x\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos x\, dx = \dfrac{1}{2n+1}\sin 1 - \dfrac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1}\cos x\, dx$.

Cum $0 \le \int_0^1 x^{2n+1}\cos x\, dx \le \int_0^1 x^{2n+1}\, dx = \dfrac{1}{2n+2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^{2n+1}\cos x\, dx$. Atunci, din

$nI_n = \dfrac{n}{2n+1}\sin 1 - \dfrac{n}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1}\cos x\, dx$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} n\, I_n = \dfrac{1}{2}\sin 1$.

Testul 9

Subiectul I

1. Avem $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum\limits_{k=0}^{n} k + \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) + n + 1 = (n+1)^2$. Relaţia din enunţ devine $(n+1)^2 = 625 \Leftrightarrow n + 1 = 25 \Leftrightarrow n = 24$.

2. Avem $f(x) = x^3(x^2 - 2) + 3$. Cum $f(0) = f(\sqrt{2}) = 3$, rezultă că f nu este injectivă.

3. Ecuaţia este echivalentă cu $\dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 4x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$
$\cos 3x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0$ sau $\cos x = 0$. Cum $\cos 3x = 0$, $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow 3x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$, iar $\cos x = 0$, $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, rezultă că soluţiile sunt $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

4. Numărul total de funcţii este 5^3, iar numărul de funcţii pentru care $f(1) = f(2)$ este 5^2. Rezultă că numărul cerut este $5^3 - 5^2 = 100$. **5.** Cum $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt coliniari, rezultă că $2 = \dfrac{m}{5}$, deci $m = 10$. Atunci $|\,v\,| = \sqrt{4+m^2} = \ = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. **6.** Fie l latura triunghiului echilateral. Din teorema sinusului rezultă că $l = 2R\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Deci $S = \dfrac{l^3}{4R} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Subiectul II

1. ***a)*** Fie $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $2X^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, de unde $2X^2 + X + I_2 = O_2$, deci $X \in M$.

b) Avem $A \in M \Leftrightarrow 2A^2 + A = -I_2 \Leftrightarrow A(2A + I_2) = -I_2$. Rezultă $\det(A)\cdot\det(2A + I_2) = 1$, deci $\det(A) \neq 0$. În consecinţă, A este inversabilă.

c) $A \in M \Leftrightarrow A^2 + \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}I_2 = O_2$. Din teorema lui Hamilton-Cayley este suficient să găsim o infinitate de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $a + d = -\dfrac{1}{2}$ şi $ad - bc = \dfrac{1}{2}$. Alegem, de exemplu $a = -\dfrac{1}{2}$, $d = 0$, $b \in \mathbb{R}^*$ şi $c = -\dfrac{1}{2b}$. Matricele $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & b \\ -\frac{1}{2b} & 0 \end{pmatrix}$, cu $b \in \mathbb{R}^*$, aparţin lui M.

2. ***a)*** Avem $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$, deci ordinul lui σ este 2.

b) Fie $\tau_1, \tau_2 \in H$. Cum $\varepsilon(\tau_1\tau_2) = \varepsilon(\tau_1)\cdot\varepsilon(\tau_2) = 1$, rezultă că $\tau_1\tau_2$ este pară, deci $\tau_1\tau_2 \in H$. Fie $\tau \in H$. Cum $\varepsilon(e) = \varepsilon(\tau\cdot\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau)\cdot\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau^{-1})$ rezultă că $\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$, deci τ^{-1} este pară, de unde $\tau^{-1} \in H$. Deci H este subgrup al grupului S_4.

c) Fie $f : S_4 \to S_4$ un morfism de grupuri. Dacă $f(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $e = f(e) = f(\sigma^2) =$
$= f^2(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, fals. Deci $f(\sigma) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Subiectul III

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\cdot x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1\cdot\ln e=1$, deci dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$, $x\in(0,\infty)$. Cum $f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0$, $\forall x\in(0,\infty)$, rezultă că f' e strict crescătoare. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$, deci $f'(x)<0$, $\forall x\in(0,\infty)$, adică f este strict descrescătoare.

c) Avem $\frac{f(k)}{k+1}=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln k$, deci $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n+1)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1))^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(n+1))}$. Cu teorema lui L'Hôspital, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x+1))}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}=0$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}=0$. Ca urmare, limita cerută este 1.

2. a) $\int_0^1 x f(x)\,dx=\int_0^1 x\,2^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}2^t\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}2^t\,dt=\frac{1}{2}\frac{2^t}{\ln 2}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{4\ln 2}$.

b) Avem $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)\,dx-\int_1^{n}f(x)\,dx=\int_n^{n+1}f(x)\,dx$. Cum $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $I_{n+1}-I_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict crescător. Deoarece $0\le I_n=\int_1^n 2^{-x^2}\,dx\le\int_1^n 2^{-x}\,dx=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big|_1^n=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2\ln 2}$, rezultă că şirul $(I_n)_n$ este mărginit.

c) Din teorema de medie, există $c_n\in[n,n+1]$ astfel încât $\int_n^{n+1}f(x)\,dx=f(c_n)(n+1-n)=f(c_n)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{-c_n^2}=\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x^2}=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,dx=0$.

Testul 10

Subiectul I

1. Cum $3^2>2^3$ rezultă că $3>2^{1,5}>2^{\sqrt{2}}$. Rezultă că $\log_2 3>\sqrt{2}$, deci $\log_2^2 3>2$. Atunci $\log_2 3>\frac{2}{\log_2 3}=2\log_3 2=\log_3 4$. **2.** $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-2x^2-3=0\Leftrightarrow(x^2+1)(x^2-3)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, rezultă că graficul lui f taie axa Ox în două puncte. **3.** Pentru $x>0$, $x\ne1$ ecuaţia este echivalentă cu $x^2-3x+2=0$, ecuaţie care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=2$. Cum $x\ne1$, ecuaţia are soluţia unică $x=2$. **4.** Numărul este $C_{20}^3\cdot C_{10}^2$. **5.** Fie $M(\alpha,\beta)$ piciorul perpendicularei din A pe d. Cum $m_d\cdot m_{AM}=-1$, rezultă că $\frac{\beta-2}{\alpha-1}=-1$, deci $\alpha+\beta=3$. Deoarece $M(\alpha,\beta)\in d$, avem $\alpha-\beta=3$, deci $\alpha=3$ şi $\beta=0$.

6. Avem $B+C=\pi-A>\frac{\pi}{2}$, deci $\frac{\pi}{2}>B>\frac{\pi}{2}-C$. Cum funcţia sin este strict crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ rezultă că $\sin B>\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\cos C$.

Subiectul II

1. a) Fie $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Cum $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=A=A^t$, rezultă $A\in M$.

b) $A\in M\Rightarrow\det(A^2)=\det(A^t)\Rightarrow\det^2(A)=\det(A)$. Cum $\det(A)\ne0$, rezultă că $\det(A)=1$.

c) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M$ cu $\det(A)=0$. Cum $A^2=(a+d)A=A^t$, rezultă că $(a+d)a=a$ şi $(a+d)d=d$, deci $(a+d)^2=a+d$. Dacă $a+d=0$, atunci $A^t=0$, deci $a=b=0$ şi $a^2+b^2-a=0$. Dacă $a+d=1$, atunci $A=A^t$. Rezultă $b=c$ şi $d=1-a$. Cum $ad-bc=0$ obţinem $a(1-a)-b^2=0$, deci $a^2+b^2-a=0$.

2. a) $(f_a\circ f_b)(x)=af_b(x)+3(1-a)=a(bx+3(1-b))+3(1-a)=abx+3(1-ab)=f_{ab}(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Cum $f_a\circ f_b$ şi f_{ab} au acelaşi domeniu de definiţie şi acelaşi domeniu de valori, rezultă $f_a\circ f_b=f_{ab}$.

b) Cum $a\ne0$, $b\ne0\Rightarrow ab\ne0$, din punctul **a)**, deci compunerea funcţiilor este lege bine definită pe G. Compunerea funcţiilor este asociativă, are element neutru, deoarece $f_a\circ f_1=f_1\circ f_a=f_a$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$, şi, pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, $f_a\circ f_{\frac{1}{a}}=f_{\frac{1}{a}}\circ f_a=f_1$. Ca urmare, $(G,\circ)$ este grup.

c) $f_a\circ f_a\circ f_a=f_{a^3}$. Atunci $f_{a^3}(x)=8x-21\Leftrightarrow a^3x+3(1-a^3)=8x-21$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $a^3=8$ şi $3(1-a^3)=-21$, condiţii îndeplinite pentru $a=2$.

Subiectul III

1. a) Cum f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, studiem limitele laterale ale funcţiei f în punctele 1 şi 2. Avem $\lim\limits_{x\nearrow1}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\searrow1}f(x)=-\infty$ şi, respectiv, $\lim\limits_{x\nearrow2}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow2}f(x)=+\infty$, deci dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ sunt asimptotele verticale ale graficului funcţiei f.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\downarrow0}y^y=\lim\limits_{y\downarrow0}e^{y\ln y}=e^{\lim\limits_{y\downarrow0}y\ln y}=1$, deoarece $\lim\limits_{y\downarrow0}y\ln y=\lim\limits_{y\downarrow0}\frac{\ln y}{y^{-1}}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{y\downarrow0}\frac{\frac{1}{y}}{-y^{-2}}=\lim\limits_{y\downarrow0}(-y)=0$.

c) $f(x)=\frac{2x}{(x-1)(x-2)}=\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x-1}$. Rezultă că $f''(x)=4\left(\frac{2}{(x-2)^3}-\frac{1}{(x-1)^3}\right)$. Avem $f''(x)=0$ $\Leftrightarrow\frac{2}{(x-2)^3}=\frac{1}{(x-1)^3}\Leftrightarrow\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^3=2\Leftrightarrow\frac{x-2}{x-1}=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}-1}$.

2. a) $f(1)=\int_0^1\frac{t}{t^2+2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(t^2+2)'}{t^2+2}\,dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $f(x+2)+2f(x)=\int_0^1\frac{t^{x+2}+2t^x}{t^2+2}\,dt=\int_0^1 t^x\,dt=\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{x+1}$.

c) Cum $f(x+1)-f(x)=\int_0^1\frac{t^x(t-1)}{t^2+2}\,dt\le0$, rezultă $f(x+1)\le f(x)$, $\forall x>0$. Folosind acest lucru, avem: $3f(x+2)\le f(x+2)+2f(x)\le3f(x)$, de unde, conform **b)**, rezultă $3f(x+2)\le\frac{1}{x+1}\le3f(x)$, $\forall x>0$. Obţinem $\frac{1}{3(x+1)}\le f(x)\le\frac{1}{3(x-1)}$, de unde $\frac{x}{3(x+1)}\le xf(x)\le\frac{x}{3(x-1)}$, pentru orice $x>1$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3(x-1)}=\frac{1}{3}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}x\,f(x)=\frac{1}{3}$.

Testul 11

Subiectul I

1. Fie $z = a + ib$. Atunci $a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. **2.** $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right) = [2, \infty)$, $\operatorname{Im} g = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right] = (-\infty, a+4]$. Atunci $|\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g| = 1 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$.

3. Ecuația se scrie $8^x + 1 = 9^x \Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$. Cum funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă și $f(1) = 1$, rezultă că ecuația are soluția unică $x = 1$.

4. Există A_4^2 submulțimi ordonate cu trei elemente care conțin elementul 1 pe prima poziție. Analog pentru submulțimile care conțin elementul 1 pe pozițiile 2 și 3. Numărul cerut este $3A_4^2 = 36$.

5. Fie B' simetricul lui B față de A. Atunci: $\frac{x_{B'} + x_B}{2} = x_A$ și $\frac{y_{B'} + y_B}{2} = y_A$. Rezultă că $x_{B'} = 2x_A - x_B = -2$ și $y_{B'} = 2y_A - y_B = 2$. **6.** Avem $\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = 2R_1 = 2R_2 = \frac{CD}{\sin\frac{A}{2}}$, de unde rezultă că $BD = CD$. Din teorema bisectoarei avem că $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, deci $AB = AC$.

Subiectul II

1. a) Avem $A^2 - I_3 = 16\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $A^2 - I_3 \neq O_3$ și toți minorii de ordinul doi sunt nuli, rezultă că rangul cerut este 1.

b) $A^2 = aA + bI_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 17 & 16 & 16 \\ 16 & 17 & 16 \\ 16 & 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & 2a & 2a \\ 2a & 3a+b & 2a \\ 2a & 2a & 3a+b \end{pmatrix}$, de unde $2a = 16$ și $3a + b = 17$, ceea ce conduce la $a = 8$ și $b = -7$.

c) $A^2 = 8A - 7I_3 \Leftrightarrow A^2 - 8A = -7I_3 \Leftrightarrow A(A - 8I_3) = -7I_3 \Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{7}A + \frac{8}{7}I_3$.

1. a) $\sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)+1} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+4} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 5} = x * y$, $\forall\, x, y \in (1, \infty)$;

b) Din ipoteză „*“ este lege de compoziție pe $(1, \infty)$. Verificăm axiomele grupului:

- Asociativitatea: pentru orice $x, y, z \in (1, \infty)$, avem: $(x * y) * z = \left(\sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)+1}\right) * z = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{\frac{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{16}+1}$, și $x * (y * z) = x * \sqrt{\frac{1}{4}(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)\cdot\frac{1}{4}(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{\frac{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{16}+1}$, deci legea „*“ este asociativă.
- Element neutru: $e \in (1, \infty)$ este element neutru dacă și numai dacă $x * e = e * x = x$, $\forall\, x \in (1, \infty) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(e^2-1)+1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-1)(e^2-1) = x^2 - 1$, $\forall x \in (1, \infty) \Leftrightarrow e^2 = 5 \Leftrightarrow e = \sqrt{5} \in (1, \infty)$.
- Simetrizabilitatea elementelor. Fie $x \in (1, \infty)$; x este simetrizabil dacă există $x' \in (1, \infty)$ astfel încât $x * x' = x' * x = e \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(x'^2-1)+1} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-1)(x'^2-1) = 4 \Leftrightarrow x'^2 = 1 + \frac{16}{x^2-1}$, de unde $x' = \sqrt{1 + \frac{16}{x^2-1}} > 1$, deci toate elementele din G sunt simetrizabile. Rezultă că $(G, *)$ este grup.

c) $f(x) * f(y) = \sqrt{\frac{1}{2}(f^2(x)-1)(f^2(y)-1)+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2x \cdot 2y - 1} = \sqrt{2xy-1} = f(x \cdot y)$, $\forall x, y \in (0, \infty)$, deci f este morfism de grupuri. Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că f este injectivă. Cum f este continuă, crescătoare, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că $\operatorname{Im} f = (1, \infty)$, deci f este surjectivă.

Subiectul III

1. a) Punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 1$ are coordonatele $A(1, f(1))$, deci $(1, e - 2)$. Cum $f'(x) = 2x e^{x^2} - 2x$, rezultă că panta tangentei este $f'(1) = 2e - 2$. Ecuația tangentei este $y - e + 2 = 2(e-1)(x-1)$.

b) Inegalitatea $2f(x) \geq x^4$ este echivalentă cu $e^{x^2} - 1 - x^2 \geq \frac{x^4}{2} \Leftrightarrow e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} \geq 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. Fie $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$. Cum $g'(t) = e^t - 1 - t$ și $g''(t) = e^t - 1 \geq 0$, $\forall t \in [0, \infty)$ rezultă că g' este strict crescătoare, deci $g'(t) \geq g'(0) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. Rezultă că g este crescătoare, deci $g(t) \geq g(0) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt[4]{\frac{f(x)}{x^4}}$. Cum, din teorema lui L'Hôspital cazul $\frac{0}{0}$ avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1 - y}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{2y} = \frac{1}{2}$, rezultă că $g'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, iar $g'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-\sqrt[4]{\frac{f(x)}{x^4}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, deci g nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

2. a) $I_1 = \int_0^1 (x^2 + 2x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$.

b) Avem $I_n = \int_0^1 (x^2 + 2x + 2)^n\,dx \geq \int_0^1 2^n\,dx = 2^n$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} I_n = \infty$.

c) $I_n = \int_0^1 (x+1)'(x^2+2x+2)^n dx = (x+1)(x^2+2x+2)^n \Big|_0^1 - 2n\int_0^1 (x+1)^2(x^2+2x+2)^{n-1}dx = 2\cdot 5^n - 2^n - 2n\int_0^1 (x^2+2x+2-1)(x^2+2x+2)^{n-1}\,dx = 2\cdot 5^n - 2^n - 2n\,I_n + 2nI_{n-1}$.

Rezultă că $(2n+1)I_n - 2I_{n-1} = 2\cdot 5^n - 2^n$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^n} = 0$, rezultă că limita cerută este 2.

Testul 12

Subiectul I

1. Numărul este $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} = 1 \in \mathbb{N}$. **2.** Cum $f(-0) = -f(0)$, rezultă că $f(0) = 0$, deci produsul este 0. **3.** Notăm $\sqrt[5]{1-x} = t$. Ecuația devine $t = -t^5 \Leftrightarrow t(t^4+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Deci $x = 1$ este unica soluție a ecuației. **4.** Dacă mulțimea are n elemente, atunci $2^{n-1} = 16$, deci $n = 5$.

5. Fie h înălţimea din A. Cum panta dreptei BC este 1 rezultă că panta lui h este -1. Ecuaţia lui h este $y = x + 1$. **6.** Avem $\cos^2 10° + \cos^2 50° + \cos^2 70° = \frac{1+\cos 20°}{2} + \frac{1+\cos 100°}{2} + \frac{1+\cos 140°}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2\cos 60°\cos 40° + \cos 140°) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 40° + \cos 140°) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 40° - \cos 40°) = \frac{3}{2}$.

Subiectul II

1. *a)* $A^2 = \begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix} = O_2$. Rezultă $A^4 = O_2$, deci $A \in M$.

b) Fie $X \in M$. Atunci $O = \det(O_2) = \det(X^4) = \det^4(X)$, deci $\det(X) = 0$. Din teorema lui Hamilton Cayley, rezultă că $X^2 = \mathrm{tr}(X)\cdot X$, deci $X^4 = \mathrm{tr}(X)\cdot X^3 = \mathrm{tr}^2(X)\cdot X^2 = \mathrm{tr}^3(X)\cdot X$. Atunci $\mathrm{tr}^3(X)\cdot X = O_2$, deci $\mathrm{tr}(\mathrm{tr}^3(X)\cdot X) = \mathrm{tr}(O_2)$, de unde $\mathrm{tr}^4(X) = 0$. Rezultă că $\mathrm{tr}(X) = 0$, deci $X^2 = O_2$.

c) Fie $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o soluţie a ecuaţiei $Y^2 = A$; atunci $Y^4 = A^2 = O_2$. Rezultă că $Y \in M \Rightarrow Y^2 = O_2 \Rightarrow A = O_2$, fals. Deci ecuaţia nu are soluţii.

2. *a)* $u \in (2, \infty)$ este element neutru al legii „*" $\Leftrightarrow x * u = u * x = x, \forall x \in (2,\infty) \Leftrightarrow (x-2)^{\ln(u-2)} + 2 = x, \forall x \in (2, \infty) \Leftrightarrow (x-2)^{\ln(u-2)} = x - 2, \forall x \in (2,\infty) \Leftrightarrow \ln(u-2) = 1 \Leftrightarrow u - 2 = e \Leftrightarrow u = e + 2 \in (2,\infty)$. Cum $(e+2) * x = e^{\ln(x-2)} + 2 = x - 2 + 2 = x$, $\forall x \in (2, \infty)$, rezultă că $u = e + 2$ este element neutru.

b) $x \in (2, \infty)$ este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in (2, \infty)$ astfel încât $x * x' = x' * x = u \Leftrightarrow (x' - 2)^{\ln(x-2)} = e + 2$. Dacă $x \neq 3$, atunci $\ln(x-2) \neq 0$ şi $x' = 2 + (e+2)^{\frac{1}{\ln(x-2)}} \in (2,\infty)$, deci toate elementele diferite de 3 sunt simetrizabile. Dacă $x = 3$, atunci $(x'-2)^{\ln(3-2)} = 1 \neq e + 2$, deci $x = 3$ nu este simetrizabil.

c) Avem $x * x * x = ((x-2)^{\ln(x-2)} + 2) * x = (x-2)^{\ln^2(x-2)} + 2$ şi $x * x * x * x = (x-2)^{\ln^3(x-2)} + 2$. Ecuaţia se scrie $(x-2)^{\ln^3(x-2)} = 3 \Leftrightarrow \ln^4(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \pm\sqrt[4]{\ln 3} \Leftrightarrow x - 2 = e^{\pm\sqrt[4]{\ln 3}}$. Obţinem $x_1 = 2 + e^{\sqrt[4]{\ln 3}} > 2$ şi $x_2 = 2 + e^{-\sqrt[4]{\ln 3}} > 2$.

Subiectul III

1. *a)* $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ deci f este strict crescătoare, şi, în consecinţă, este injectivă. Cum f este continuă, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă.

b) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = 0 \in \mathbb{R}$ şi $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = 0 \in \mathbb{R}$, deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$. Apoi, $\lim_{x\downarrow 0} g(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = \infty$ şi $\lim_{x\uparrow 0} g(x) = -\infty$, deci dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală. Cum g este continuă pe $\mathbb{R}^*$, nu există alte asimptote verticale.

c) Avem $x_2 = f(-1) = \frac{1}{e} - 2 < -1$, deci $x_2 < x_1$. Demonstrăm prin inducţie că şirul $(x_n)_n$ este descrescător. Presupunem $x_n < x_{n-1}$. Cum f este crescătoare, rezultă că $f(x_n) \le f(x_{n-1})$, deci $x_{n+1} \le x_n$. Presupunând că $(x_n)_{n\ge1}$ ar fi mărginit, atunci şirul ar fi convergent; notând $l = \lim_{n\to\infty} x_n$, rezultă $f(l) = l$, de unde $e^l + l - 1 = l \Leftrightarrow e^l = 1 \Leftrightarrow l = 0$ Cum $(x_n)_{n\ge1}$ este descrescător, rezultă că $x_n \ge l$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $x_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, fals. Deci şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este nemărginit şi, fiind descrescător, rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

2. *a)* Aria $= \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

b) Cu schimbarea de variabilă $y = 2\pi - x$ avem: $I = \int_0^{2\pi} xf(x)\,dx = -\int_{2\pi}^{0} (2\pi - y)\, f(2\pi - y)\,dy = \int_0^{2\pi} (2\pi - y)\frac{\cos(2\pi - y)}{1 + \sin^2(2\pi - y)}\,dy = \int_0^{2\pi}(2\pi - y)\frac{\cos y}{1+\sin^2 y}\,dy = \int_0^{2\pi}(2\pi - y)\, f(y)\,dy = \int_0^{2\pi} 2\pi f(y)\,dy - I$, de unde se obţine $2I = 2\pi\int_0^{2\pi} f(y)\,dy = 2\pi\int_0^{2\pi}\frac{\cos y}{1+\sin^2 y}\,dy = 2\pi \operatorname{arctg}(\sin y)\Big|_0^{2\pi} = 0$, deci $I = 0$.

c) Din teorema lui L'Hôspital, cazul $\frac{0}{0}$ avem $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x (f(t) - 1)\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin^2 x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1 - \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{-\sin x - 2\sin x\cos x}{2x} = \lim_{x\to0}\left(-\frac{\sin x}{2x} - \frac{\sin x}{x}\cos x\right) = -\frac{3}{2}$.

Testul 13

Subiectul I

1. Cum pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k$ este pătrat perfect, rezultă că numărul cerut este egal cu numărul pătratelor perfecte cuprinse între 1 şi 2012. Cum $44^2 = 1976 < 2012 < 2025 = 45^2$, rezultă că există 44 pătrate perfecte, deci mulţimea are 44 de elemente numere raţionale. **2.** $f(0) = 2$ implică $f^{-1}(2) = 0$, iar $f(-1) = 0$ implică $f^{-1}(0) = -1$. Ca urmare, $(f^{-1}\circ f^{-1})(2) = f^{-1}(f^{-1}(2)) = f^{-1}(0) = -1$.

3. Avem $\sin x = -\sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

4. Există 4! permutări care au pe prima poziţie numărul 2 şi 4! permutări care au pe prima poziţie numărul 4. Există deci $2 \cdot 4! = 48$ permutări cu proprietatea din enunţ. **5.** Prin calcul direct, sau folosind relaţia $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, avem: $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = C_4^4 + C_5^4 - C_4^4 + C_6^4 - C_5^4 + C_7^4 - C_6^4 = C_7^4$.

6. Avem $2\sin B\cos C = \sin A = \sin(\pi - (B + C)) = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$. Obţinem $\sin B\cos C - \cos B\sin C = 0$, deci $\sin(B - C) = 0$. Cum $B - C \in (-\pi, \pi)$, rezultă $B - C = 0$, deci $B = C$ şi, în consecinţă, triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul II

1. *a)* Fie $X = \begin{pmatrix} a & b\\ 2b & a\end{pmatrix} \in M$, $X \neq O_2$. Atunci $\det(X) = a^2 - 2b^2$. Dacă $\det(X) = 0$, atunci $2b^2 = a^2$. Pentru $b = 0$ obţinem $a = 0$, deci $X = O_2$ fals, iar pentru $b \neq 0$ rezultă că $\frac{a^2}{b^2} = 2$, deci $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{2}$, fals pentru că $\sqrt{2}$ este număr iraţional. Obţinem $\det(X) \neq 0$, deci X este inversabilă.

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Atunci $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ 4a+3c & 4b+3d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a+4b & 2a+3b\\ 3c+4d & 2c+3d\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3a + 2c = 3a + 4b$ şi $3b + 2d = 2a + 3b \Leftrightarrow c = 2b$ şi $a = d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} a & b\\ 2b & a\end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Q}$, deci $X \in M$. *c)* Fie X o soluţie. Cum $AX = X^2 \cdot X = X^3 = X \cdot X^2 = XA \Rightarrow$ $X \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b\\ 2b & a\end{pmatrix}$. Atunci $X^2=\begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab\\ 4ab & a^2+2b^2\end{pmatrix}$. Cum $X^2=A \Rightarrow a^2+2b^2=3$ şi $ab=1\Rightarrow$ $a^2-3ab+2b^2=0 \Rightarrow (a-b)(a-2b)=0\Rightarrow a=b$ sau $a=2b$. Dacă $a=b$, atunci $a^2=1$, deci $a=b=1$ sau $a=b=-1$. Dacă $a=2b$, atunci $2b^2=1$, deci $b=\pm\frac{1}{\sqrt2}\notin\mathbb{Q}$.

Obţinem matricele $X_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$ şi $X_2=\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$. Cum $X_1^2=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}=A$ şi $X_2^2=(-X_1)^2=X_1^2=A$ rezultă că soluţiile ecuaţiei sunt X_1 şi X_2.

2. *a)* Avem $(f_k\circ f_p)(x)=(f_k(f_p(x))=3^k\cdot f_p(x)+2\cdot3^k-2=3^k(3^px+2\cdot3^p-2)+2\cdot3^k-2=$ $=3^{k+p}x+2\cdot3^{k+p}-2=f_{k+p}(x)$. Cum $f_k\circ f_p$ şi f_{k+p} au acelaşi codomeniu şi acelaşi domeniu de definiţie, rezultă că $f_k\circ f_p=f_{k+p}$.

b) Cum $k+p\in\mathbb{Z}$, $\forall k,p\in\mathbb{Z}$, din punctul a) rezultă că operaţia de compunere a funcţiilor este lege pe G. Cum compunerea funcţiilor este asociativă, $f_k\circ f_0=f_0\circ f_k=f_k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ şi $f_k\circ f_{-k}=f_{-k}\circ=f_k=f_0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ rezultă că operaţia de compunere are element neutru, $f_0\in G$ şi orice funcţie $f_k\in G$ este inversabilă cu $f_k^{-1}=f_{-k}\in G$. Rezultă că $(G,\circ)$ este grup.

c) Fie $f, g\in H$. Atunci $f=f_{3k}$ şi $g=f_{3p}$ cu $k,p\in\mathbb{Z}$. Cum $f\circ g^{-1}=f_{3k}\circ f_{3p}^{-1}=f_{3k}\circ f_{-3p}=f_{3k-3p}=$ $=f_{3(k-p)}\in H$, rezultă că H este subgrup al lui G.

Subiectul III

1. *a)* $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(1+x)^2}=\frac{(x+1)^2-x^2}{(1+x^2)(2+2x+x^2)}=\frac{2x+1}{(1+x^2)(2+2x+2x^2)}$. Cum $f'(x)<0$ pentru $x\in\left(-\infty,-\frac12\right)$, $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(-\frac12,\infty\right)$ şi $f'\left(-\frac12\right)=0$, din monotonia lui f rezultă că $x_0=-\frac12$ este unicul punct de extrem (minim) a lui f.

b) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$ şi $f\left(-\frac12\right)=-2\,\text{arctg}\frac12$. Din tabelul de variaţie a lui f rezultă:

- pentru $m\in\left(-\infty,-2\,\text{arctg}\frac12\right)\cup[0,\infty)$ ecuaţia nu are soluţii;
- pentru $m=-2\,\text{arctg}\frac12$ ecuaţia are o soluţie;
- pentru $m\in\left(-2\,\text{arctg}\frac12,0\right)$ ecuaţia are două soluţii.

c) Fie $x\in[0,\infty)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $g(t)=\text{arctg}\,t$ pe intervalul $[x,x+1]$, există $c\in(x,x+1)$ astfel încât $g(x+1)-g(x)=g'(c)=\frac{1}{c^2+1}<\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow -f(x)<\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow f(x)>-\frac{1}{x^2+1}$.

2. *a)* $I_1=\int_0^1 x\sin x\,dx=\int_0^1 x(-\cos x)'\,dx=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx=-\cos1+\sin x\Big|_0^1=\sin1-\cos1$.

b) Fie $n\geq3$. Avem $I_n=\int_0^1 x^n\sin x\,dx=\int_0^1 x^n(-\cos x)'\,dx=-x^n\cos x\Big|_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}\cos x\,dx=$ $-\cos1+n\int_0^1 x^{n-1}(\sin x)'\,dx=-\cos1+nx^{n-1}\sin x\Big|_0^1-n(n-1)\int_0^1x^{n-2}\sin x\,dx=-\cos1+n\sin1-n(n-1)I_{n-2}$, deci $I_n+n(n-1)I_{n-2}=n\sin1-\cos1$.

c) Din punctul b) rezultă că $I_{n+2}+(n+2)(n+1)I_n=(n+2)\cdot\sin1-\cos1$, de unde $nI_n=\frac{n}{n+1}\sin1-\frac{n}{(n+2)(n+1)}\cos1-\frac{n}{(n+2)(n+1)}I_{n+2}$. Deoarece $0\le I_n=\int_0^1x^n\sin x\,dx\le1$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+2)(n+1)}I_{n+2}=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\sin1$.

Testul 14

Subiectul I

1. Avem $z=\frac{(1+i)(1+2i)}{5}+\frac{(1+2i)(1+i)}{2}=\frac{7}{10}(1+i)(1+2i)=\frac{7}{10}(-1+3i)$, deci $\text{Re}(z)=-\frac{7}{10}$.

2. $f\left(x+\frac12\right)=\left[2\left(x+\frac12\right)\right]-\left[x+\frac12\right]-[x+1]=[2x+1]-\left[x+\frac12\right]-[x+1]=[2x]+1-\left[x+\frac12\right]-[x]-1=$ $=[2x]-[x]-\left[x+\frac12\right]=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este periodică, cu perioada $\frac12$.

3. Ecuaţia este echivalentă cu $2^{2x}=2^{\frac1x}\Leftrightarrow 2x=\frac1x\Leftrightarrow x^2=\frac12$, deci soluţiile sunt $x_1=-\frac{1}{\sqrt2}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt2}$.

4. $C_n^1+2C_n^2=16\Leftrightarrow n+n(n-1)=16\Leftrightarrow n^2=16$, $n\ge2$, deci $n=4$.

5. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\Rightarrow x_B+x_C=3x_G-x_A=8\Rightarrow x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=4$ şi, analog, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\Rightarrow y_B+y_C=3y_G-y_A=10\Rightarrow y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=5$, deci $M(4, 5)$.

6. Din teorema sinusului avem $\frac{BC}{\sin A}=2R$, deci $\sin A=1$. Atunci $\cos A=0$.

Subiectul II

1. *a)* $\det(A)=\begin{vmatrix}a&1&2b\\b&1&-a\\0&1&4\end{vmatrix}=4a+2b^2+a^2-4b=(a+2)^2+2(b-1)^2-6$. Avem $\det(A)=-6$ dacă şi numai dacă $(a+2)^2+2(b-1)^2=0\Leftrightarrow a=-2$ şi $b=1$.

b) Fie $\Delta_1=\begin{vmatrix}a&1\\0&1\end{vmatrix}=a$ şi $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-a\\1&4\end{vmatrix}=a+4$. Cum $\Delta_2-\Delta_1\ 4\neq0$ rezultă că Δ_1 şi Δ_2 nu pot fi simultan zero, deci $\text{rang}(A)\ge2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Fie $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ o soluţie. Atunci $\det(AX)=\det(-\sqrt[3]{6}I_3)$, deci $\det(A)\cdot\det(X)=-6$. Cum $\det(X)=1$, rezultă că $\det(A)=-6$, deci $a=-2$ şi $b=1$. Deci, dacă $a\neq-2$ sau $b\neq1$ rezultă că ecuaţia nu are soluţii. Dacă $a=-2$, $b=1$, atunci $AX=-\sqrt[3]{6}I_3\Leftrightarrow X=-\sqrt[3]{6}\cdot A^{-1}=$

$$= -\sqrt[3]{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\sqrt[3]{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. ***a)*** Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Cum $x*y = xy + 3x + 3y + 7 = yx + 3y + 3x + 7 = y*x$, legea „$*$" este comutativă.

b) $(1*2)*3 = 18*3 = 124$, iar $1*(2*3) = 1*28 = 122$ rezultă că $\frac{(1*2)*3}{1*(2*3)} = \frac{124}{122} = \frac{62}{61}$.

c) Legea „$*$" are element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xe + 3x + 3e + 7 = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(e+2) + 3e + 7 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e + 2 = 0$ şi $3e + 7 = 0 \Leftrightarrow e = -2$ şi $e = -\frac{7}{3}$, fals. Deci legea „$*$" nu are element neutru.

Subiectul III

1. ***a)*** Cum $f'(x) = e^x + 3$ şi $f'(1) = e + 3$, rezultă că ecuaţia tangentei în punctul $A\,(1, e+2)$ la graficul funcţiei f este $y - e - 2 = (e+3)(x-1)$.

b) Avem $f(-1) + f(-2) + ... + f(-n) = e^{-1} - 3\cdot 1 - 1 + e^{-2} - 3\cdot 2 - 1 + ... + e^{-n} - 3n - 1 = e^{-1} + e^{-2} + ... + e^{-n} - 3(1 + 2 + ... + n) - n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n} - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n} - \frac{n(3n+5)}{2}$,

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(-1) + f(-2) + ... + f(-n) + \frac{n(3n+5)}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{1}{e-1}$.

c) Fie $m \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) - mx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - mx$. Cum $g(0) = f(0) = 0$, rezultă că $g(x) \geq g(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ este punct de minim. Cum g este derivabilă, din teorema lui Fermat rezultă $g'(0) = 0$. Deoarece $g'(x) = f'(x) - m = e^x + 3 - m$ şi $g'(0) = 4 - m$, rezultă $m = 4$. Pentru $m = 4$, considerăm funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - 4x = e^x - x - 1$. Cum $h'(x) = e^x - 1$, din monotonia lui h rezultă că $x = 0$ este punct de minim global. Rezultă că $h(x) \geq h(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) \geq 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. În concluzie, $m = 4$.

2. ***a)*** $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg}x\,dx = \int_0^1 \operatorname{arctg}x\cdot(\operatorname{arctg}x)'dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$.

b) $f^{101}(-x) = \operatorname{arctg}^{101}(-x) = -\operatorname{arctg}^{101}x = -f^{101}(x)$, deci funcţia de sub integrală este impară. Rezultă că integrala cerută este 0.

c) Cum $0 \leq \operatorname{arctg}x \leq \frac{\pi}{4}$ $\forall x \in [0, 1]$, rezultă că $0 \leq x^3\operatorname{arctg}^n x \leq x^3\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, $\forall x \in [0, 1]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Obţinem $0 \leq \int_0^1 x^3 f^n(x)\,dx \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$, rezultă că limita cerută este 0.

Testul 15

Subiectul I

1. $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[n]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{n}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \mid 10 \Leftrightarrow n \in \{2, 5, 10\}$. Deci mulţimea conţine 3 numere raţionale.

2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x^3 - x + a = -x^3 - x - a$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$. **3.** Ecuaţia devine $\frac{4^x + 2}{3} = 2^x \Leftrightarrow 4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 2$. Soluţiile sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

4. Fie $B = \{a, b\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Cum există 2^4 funcţii $f : \{1, 2, 3, 4\} \to B$ şi exact 2 funcţii constant $f(x) = a$, $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\}$ şi $f(x) = b$, $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\}$ rezultă că există $2^4 - 2 = 14$ funcţii cu $\operatorname{Im}f = B$. Cum există $C_4^2 = 6$ submulţimi cu 2 elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$, rezultă că numărul cerut est $14 \cdot 6 = 84$. **5.** Fie T mijlocul segmentului AB. Atunci $T(-1, 4)$. Cum panta dreptei AB este $-\frac{1}{2}$, rezult că panta mediatoarei este 2. Atunci mediatoarea are ecuaţia $y - 4 = 2(x + 1)$, $M(-1, a)$ se află p mediatoare $\Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Sau, $AM = MB \Leftrightarrow \sqrt{4 + (3-a)^2} = \sqrt{4 + (5-a)^2} \Leftrightarrow (3-a)^2 = (5-a)^2 \Leftrightarrow 9 - 6a + a^2 = 25 - 10a + a^2 \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$.

6. Avem $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{2p}{abc} = \frac{2}{r}\cdot\frac{pr}{abc} = \frac{2}{r}\cdot\frac{S}{abc} = \frac{2}{r}\cdot\frac{S}{4RS} = \frac{1}{2rR} = \frac{1}{8}$.

Subiectul II

1. ***a)*** $\det(A) = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+1 & a^2+2 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2+1 & a^2-b^2+1 & a^2-b^2+1 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= (a^2 - b^2 + 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (a^2 - b^2 + 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a^2 - b^2 + 1$.

b) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 1$ şi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2+1 & a^2+2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2a^2$. Cum $\Delta_2 - 2\Delta_1 = 2$ rezultă că Δ_1 şi Δ_2 n pot fi simultan 0, deci $\operatorname{rang}(A) \geq 2$.

c) Din punctul ***b)*** avem $\operatorname{rang}(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 1 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 1 \Leftrightarrow b - a = b + a = 1$ sau $b - a = b + a = -1 \Leftrightarrow a = 0$ şi $b = 1$ sau $a = 0$ şi $b = -1 \Leftrightarrow a = 0$ şi $|b| = 1$.

2. ***a)*** $x*x = x \Leftrightarrow \frac{8x}{4+x^2} = x \Leftrightarrow 8x = 4x + x^3 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$, $x \in (-2, 2) \Leftrightarrow x = 0$.

b) Din ipoteză, „$*$" este lege pe $G = (-2, 2)$. Verificăm axiomele grupului:

• asociativitatea: $(x*y)*z = \frac{4(x+y)}{4+xy}*z = \frac{4\left(\frac{4(x+y)}{4+xy} + z\right)}{4 + \frac{4(x+y)}{4+xy}\cdot z} = \frac{4(x+y+z) + xyz}{4 + xy + xz + yz}$, $\forall x, y, z \in (-2, 2)$, i

$x*(y*z) = x*\frac{4(y+z)}{4+yz} = \frac{4\left(x + \frac{4(y+z)}{4+yz}\right)}{4 + x\cdot\frac{4(y+z)}{4+yz}} = \frac{4(x+y+z) + xyz}{4 + xy + xz + yz}$, deci legea „$*$" este asociativă.

• elementul neutru: $x*0 = 0*x = \frac{4x}{4} = x$, $\forall x \in (-2, 2)$, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii „$*$".

• simetrizabilitatea elementelor: fie $x \in (-2, 2)$; atunci x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists\, x' \in (-2, 2)$ astfel înc $x*x' = x'*x = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+x')}{4+xx'} = 0 \Leftrightarrow x + x' = 0 \Leftrightarrow x' = -x \in (-2, 2)$. Aşadar, toate elementele su simetrizabile, rezultă că $(G, *)$ e grup.

c) $f(x)*f(y)=\frac{4\left(\frac{2(x-1)}{x+1}+\frac{2(y-1)}{y+1}\right)}{4+4\frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}}=2\frac{(x-1)(y+1)+(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}=2\frac{2xy-2}{2xy+2}=\frac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$,

$\forall x, y \in (0, \infty)$, deci f este morfism. Cum $f(x)=\frac{2(x+1)-4}{x+1}=2-\frac{4}{x+1}$, rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Deoarece f este continuă, crescătoare, $\lim_{x\to 0}f(x)=-2$ și $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$, rezultă că Im$f=(-2, 2)$, deci f este surjectivă.

Subiectul III

1. *a)* Avem $f'(x) = 3x^2 + 6x$ și $f''(x) = 6x + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Analizând semnul lui f'', rezultă că $x = -1$ este unicul punct de inflexiune.

b) $\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=\frac{|x^3+3x^2-4|}{x+2}=\frac{|(x+2)(x^2+x-2)|}{x+2}=\frac{|(x+2)^2(x-1)|}{x+2}=(x+2)|x-1|\Rightarrow\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=0$, de unde rezultă că funcția g este derivabilă în $x_0=-2$ și $g'(-2)=0$.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2-4}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$, deoarece, aplicând teorema lui L'Hôspital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$, avem $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

2. *a)* $A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{1+x^2}\right|dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=2\,\text{arctg}\,x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1(f^{n+1}(x)-f^n(x))\,dx=\int_0^1 f^n(x)(f(x)-1)\,dx$. Deoarece $0\le f(x)\le 1$, $\forall x\in[0, 1]$, rezultă că $f^n(x)\cdot(f(x)-1)\le 0, \forall x\in[0,1]$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător, deci mărginit superior. Cum $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ rezultă că șirul $(I_n)_n$ este mărginit inferior, deci este convergent.

c) $I_n=\int_0^1 x'\cdot(x^2+1)^{-n}\,dx=\frac{x}{(x^2+1)^n}\Big|_0^1+n\int_0^1 x\cdot(x^2+1)^{-n-1}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2^n}+2n\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx=\frac{1}{2^n}+2n\int_0^1\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx=\frac{1}{2^n}+2n\,I_n-2n\,I_{n+1}$. Rezultă că $2nI_{n+1}-(2n-1)\,I_n=\frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Testul 16

Subiectul I

1. Cum $1+3^2+3^4+...+3^{2n}=\frac{9^{n+1}-1}{8}$, relația din enunț devine $9^{n+1}-1=6560\Leftrightarrow 9^{n+1}=6561\Leftrightarrow 9^n=9^4\Leftrightarrow n=3$. **2.** Deoarece $\Delta=a^2-4$, iar $G_f\cap Ox=\varnothing\Leftrightarrow\Delta<0$. Obținem $a\in\{-1, 0, 1\}$. **3.** Cum funcția $f:[-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+2}$ este strict crescătoare, deci injectivă și $f(7)=5$ rezultă că ecuația are soluția unică $x=7$. **4.** Cum $3^3<100\le5^3<7^3\le999<11^3$, rezultă că există 2 cuburi de numere prime având 3 cifre. Cum există 900 de numere naturale de 3 cifre, rezultă că probabilitatea este $\frac{1}{450}$. **5.** Avem $5\overline{AM}=2(\overline{AM}+\overline{MB})+3(\overline{AM}+\overline{MC})$, deci $\overline{O}=2\overline{MB}+3\overline{MC}$.

Cum $\overline{MB}=-\frac{3}{2}\overline{MC}\Rightarrow|\overline{MB}|=\frac{3}{2}|\overline{MC}|$, deci $\frac{BM}{MC}=\frac{3}{2}$. **6.** Cum $AB^2+AC^2+AB\cdot AC=BC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$ rezultă $\cos A=-\frac{1}{2}$, deci $m(\hat{A})=120°$.

Subiectul II

1. *a)* Dacă $A\in M$, atunci $\det^3(A)=\det(A^3)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$, deci $\det(A)\ne0$. Rezultă rang$(A)=2$.

b) Fie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $X^2=A$, $A\in M$. Atunci $\det^2(X)=\det(X^2)=\det(A)=-4$, fals pentru că $\det^2(X)\ge0$. Deci ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Dacă $A\in M$, atunci $A^6=4I_2\Leftrightarrow A^6-I_2=3I_2\Leftrightarrow(A-I_2)(A^5+A^4+A^3+A^2+A+I_2)=3I_2$, de unde rezultă că $A-I_2$ este inversabilă.

2. *a)* Fie $e\in\mathbb{Z}$ elementul neutru al legii „*". Atunci $x*e=e*x=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+e+2=x\Leftrightarrow e=-2$.
b) Fie $x, y\in\mathbb{Z}$ cu $x\circ y=-2$. Atunci $xy+2x+2y+2=-2$, deci $(x+2)(y+2)=0$, de unde $x=-2$ sau $y=-2$. Rezultă că inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ nu are divizori ai lui zero.
c) Elementul neutru al legii „$\circ$" este $c\in\mathbb{Z}$ cu $x\circ c=c\circ x=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow xc+2x+2c+2=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow(x+2)(c+1)=0$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow c=-1$. Cum f este morfism de inele, rezultă că $f(0)=-2$ și $f(1)=-1$. Rezultă $b=-2$ și $a+b=-1$, deci $a=1$ și $b=-2$.

Subiectul III

1. a) Pentru $x\ne1$ avem $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\cdot(x^2+1)}=\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$.

Obținem $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}$ pentru $x\in[0, 1)$ și $f'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$ pentru $x\in(1,\infty)$. Cum f este derivabilă pe $[0,\infty)\setminus\{1\}$, este continuă în $x_0=1$ și $\lim_{x\uparrow1}f'(x)=1$, deci $f'_s(1)=1$ și $\lim_{x\downarrow1}f'(x)=-1$, deci $f'_d(1)=-1$. Rezultă că f nu e derivabilă în $x_0=1$.

b) Deoarece $f''(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}<0$ pentru $x\in[0, 1)$ și $f''(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}>0$, $\forall x\in(1,\infty)$ și f e continuă în 1 rezultă că $x_0=1$ este unicul punct de inflexiune al graficului funcției f.

c) $\lim_{x\to\infty}x\,f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}$. Cum $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2$, din teorema lui L'Hôspital, cazul $\frac{0}{0}$, rezultă că limita cerută este 2.

2. *a)* $F\in\int f(x)\,dx=\int(1+x)'\ln(1+x)\,dx=(1+x)\ln(1+x)-\int dx=(1+x)\ln(1+x)-x+C$. Rezultă că $F(x)=(1+x)\ln(1+x)+c$. Cum $0=F(0)=c$, rezultă $F(x)=(1+x)\ln(1+x)$.

b) $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}\,dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x+1}\,dx=\int_0^1\ln(1+x)\cdot(\ln(1+x))'\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2$.

c) Avem $f\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=f\left(\frac{1-\text{tg}x}{1+\text{tg}x}\right)=\ln\left(1+\frac{1-\text{tg}x}{1+\text{tg}x}\right)=\ln\frac{2}{1+\text{tg}x}=\ln2-\ln(1+\text{tg}x)=\ln2-f(\text{tg}x)$.

Cu substituția $y=\frac{\pi}{4}-x$ avem $\int_0^{\pi/4}f(\text{tg}\,x)=-\int_{\pi/4}^{0}f\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)dy=\int_0^{\pi/4}f\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)dy=$

$=\int_0^{\pi/4}(\ln2-f(\text{tg}\,y))\,dy=\frac{\pi}{4}\ln2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\text{tg}\,y)\,dy$. Rezultă că $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\text{tg}(x))\,dx=\frac{\pi}{8}\ln2$.

Testul 17

Subiectul I

1. Avem $[x-1]=\{x\}\in[0,1)$, deci $[x-1]=\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ şi $0\le x-1<1$. Obţinem $x=1$.

2. Fie $y\in(3,\infty)$; $f(x)=y\Leftrightarrow 2^x+3=y\Leftrightarrow 2^x=y-3>0\Leftrightarrow x=\log_2(y-3)$. Deci inversa funcţiei f este funcţia $f^{-1}:(3,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_2(x-3)$.

3. Ecuaţia se scrie $\cos x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow\cos^2x=\sin x\Leftrightarrow\sin^2x+\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin x\in\left\{\dfrac{\sqrt5-1}{2},\dfrac{-\sqrt5-1}{2}\right\}$.

Cum $\dfrac{-\sqrt5-1}{2}<-1$ obţinem $\sin x=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$, deci $x\in\left\{(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt5-1}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $C_7^k<C_7^{k+1}\Leftrightarrow\dfrac{7!}{k!(7-k)!}<\dfrac{7!}{(k+1)!(7-k-1)!}\Leftrightarrow\dfrac{1}{7-k}<\dfrac{1}{k+1}\Leftrightarrow k+1<7-k\Leftrightarrow k<3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k\in\{0,1,2\}$. Probabilitatea este $\dfrac37$.

5. $\overline{u}+\overline{v}=4\overline{i}+(a+3)\overline{j}$ şi $\overline{u}-\overline{v}=-2\overline{i}+(3-a)\overline{j}$. Avem $(\overline{u}+\overline{v})\perp(\overline{u}-\overline{v})\Leftrightarrow(\overline{u}+\overline{v})\cdot(\overline{u}-\overline{v})=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -8+(a+3)(3-a)=0\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm1$. **6.** Cum $p=8$, cu formula lui Heron, aria triunghiului este $S=\sqrt{4\cdot3\cdot1}=2\sqrt3$. Deoarece $S=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$ obţinem $2\sqrt3=14\sin A$, deci $\sin A=\dfrac{\sqrt3}{7}$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A(x)=(1+3x)(1-2x)+6x^2=1+x$, deci $1+x=2\Leftrightarrow x=1$.

b) Avem $A(x)=I_2+xB$, unde $B=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}$. Cum $B^2=B$, rezultă că:

$A(x)A(y)=(I_2+xB)(I_2+yB)=I_2+xB+yB+xyB^2=I_2+(xy+x+y)B=A(xy+x+y)$.

c) Inducţie matematică după n: $P(1)$: $A(3)=A(3)$, deci $P(1)$ este adevărată. Pentru $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ avem $(A(3))^{n+1}=(A(3))^n\cdot A(3)=A(4^n-1)\cdot A(3)=A(3\cdot4^n-3+4^n-1+3)=A(4^{n+1}-1)$.

2. *a)* $\hat5x+\hat4=\hat1\Leftrightarrow\hat5x=-\hat3\Leftrightarrow\hat5x=\hat4\Leftrightarrow x=\hat5^{-1}\cdot\hat4\Leftrightarrow x=\hat3\cdot\hat4\Leftrightarrow x=\hat5$.

b) $\hat0^3=\hat0$, $\hat1^3=\hat2^3=\hat4^3=\hat1$ şi $\hat3^3=\hat5^3=\hat6^3=\hat6$, rezultă $H=\{\hat0,\hat1,\hat6\}$, deci H are 3 elemente.

c) Dacă $\hat y=\hat0$ rezultă că $x^3=\hat0$, deci $x=\hat0$. Dacă $y\ne\hat0$, atunci $x^3+\hat2y^3=\hat0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3=-\hat2y^3\Leftrightarrow(xy^{-1})^3=\hat5\Rightarrow\hat5\in H$, fals, deci $(\hat0,\hat0)$ este singura pereche cu proprietatea din enunţ.

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$; $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-m(x))=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=\dfrac12\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x+1}=-1$, deci $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. Cum f este continuă pe $[1,\infty)$, graficul lui f nu are asimptote verticale.

b) $f'(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,\forall x>1$, deci f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$. Fiind continuă, f este strict crescătoare pe $[1,\infty)$. Cum $f(1)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, rezultă că $\operatorname{Im}f=[0,\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac x2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac x2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-x}{x+1}}=e^{-1}$.

2. *a)* $I_2=\displaystyle\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx=\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx=\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\frac{1}{\sin^2x}dx-\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}dx=-\operatorname{ctg}x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac\pi4=1-\frac\pi4$.

b) $I_{n+2}+I_n=\displaystyle\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\operatorname{ctg}^nx(\operatorname{ctg}^2x+1)\,dx=0=\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\operatorname{ctg}^nx\cdot\frac{1}{\sin^2x}dx=-\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\operatorname{ctg}^nx(\operatorname{ctg}x)'dx=-\frac{\operatorname{ctg}^{n+1}x}{n+1}\Big|_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}=\frac{1}{n+1}$.

c) Cum $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_{\frac\pi4}^{\frac\pi2}\operatorname{ctg}^nx\cdot(\operatorname{ctg}x-1)dx\le0$, şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător şi, în consecinţă mărginit superior. Cum $\operatorname{ctg}x\in[0,1]$ pentru orice $x\in\left[\dfrac\pi4,\dfrac\pi2\right]$, rezultă că $I_n\ge0$, $\forall n$, deci şirul $(I_n)_n$ este mărginit. Fie $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=L$. Trecând la limită relaţia de la punctul *b)* rezultă că $2L=0$, deci $L=0$.

Testul 18

Subiectul I

1. Dacă $3=a_{n+1}$ şi $\sqrt3=a_{m+1}$, atunci $3=a_1+nr$ şi $\sqrt3=a_1+mr\Rightarrow3-\sqrt3=(n-m)r\Rightarrow$ $\Rightarrow r=\dfrac{3}{n-m}-\dfrac{\sqrt3}{n-m}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **2.** Avem $f(2)+2f\left(\dfrac12\right)=6$ şi $f\left(\dfrac12\right)+2f(2)=\dfrac{15}{2}$. Obţinem $f(2)=3$.

3. $\log_2x=\log_3x\Leftrightarrow\dfrac{\lg x}{\lg2}=\dfrac{\lg x}{\lg3}\Leftrightarrow\lg x\left(\dfrac{1}{\lg2}-\dfrac{1}{\lg3}\right)=0\Leftrightarrow\lg x=0\Leftrightarrow x=1$.

4. Avem $T_{k+1}=C_n^k\left(\sqrt[5]{2}\right)^k=C_n^k\cdot2^{\frac k5}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow5\,|\,k$, $k=\overline{0,n}$. Cum există $\left[\dfrac n5\right]+1$ multiplii de 5 de la 0 la n, rezultă că $\left[\dfrac n5\right]+1=7\Leftrightarrow\left[\dfrac n5\right]=6\Leftrightarrow6\le\dfrac n5<7\Leftrightarrow n\in\{30,31,32,33,34\}$.

5. Dreptele care trec prin $A(1,2)$ au ecuaţiile $a(x-1)+b(y-2)=0$ cu $a^2+b^2\ne0$. Distanţa de la B la o astfel de dreaptă este $\dfrac{|a(3-1)+b(-1-2)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Avem $\dfrac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow|2a-3b|=2\sqrt{a^2+b^2}$ $\Leftrightarrow4a^2-12ab+9b^2=4a^2+4b^2\Leftrightarrow b(5b-12a)=0\Rightarrow b=0$ sau $\dfrac ba=\dfrac{12}{5}$. Obţinem $a(x-1)=0$, unde $a\ne0$, deci $x-1=0$, respectiv $x-1+\dfrac ba(y-2)=0\Leftrightarrow x-1+\dfrac{12}{5}(y-2)=0\Leftrightarrow5x+12y-29=0$.

6. Din teorema cosinusului $\cos A=\dfrac{16+36-76}{48}=-\dfrac12\Rightarrow\sin A=\sqrt{1-\dfrac14}=\dfrac{\sqrt3}{2}$.

Subiectul II

1. Fie $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&m&3\\1&3&1\end{pmatrix}$ matricea sistemului. Atunci $\det(A)=m-16$. Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow\det(A)\ne0\Leftrightarrow m-16\ne0\Leftrightarrow m\ne16\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{16\}$.

b) Dacă $m \neq 16$, sistemul este compatibil determinat. Dacă $m = 16$ atunci $\det A = 0$, deci $\text{rang}\, A \leq 2$. Cum $\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$, rezultă că $\text{rang}\, A = 2$. Deoarece $\Delta_c = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 170 \neq 0$, sistemul este incompatibil. Deci nu există $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

c) O soluție cu componentele în progresie aritmetică este soluție a sistemului $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + my + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

Rezolvăm sistemul format din ecuațiile 1, 3 și 4; acesta are soluțiile Obținem prin scăderea ultimelor două ecuații $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, $z = 1$. Înlocuind în ecuația a doua obținem $m = -\frac{21}{4}$.

2. ***a)*** Fie $c, r \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f = (X^2 - 1)c + r$, cu grad $r \leq 1$. Atunci $f(1) = r(1)$ și $f(-1) = r(-1)$. Dacă $r = aX + b$, atunci $a + b = 3^{10} + 1$ și $-a + b = 1 + 3^{10} \Rightarrow b = 3^{10} + 1$ și $a = 0$, deci $r = 3^{10} + 1$.

b) Avem $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{20}$ și $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{20}$. Rezultă că $a_0 + a_2 + ... + a_{20} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = 3^{10} + 1$.

c) Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem $f(-x) = (x^2 - x + 1)^{10} + (x^2 + x + 1)^{10} = f(x)$. Cum polinomul $f(X) - f(-X)$ are o infinitate de soluții, rezultă că $f(X) = f(-X)$, deci $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_2X^{20} = a_0 - a_1X + a_2X^2 - ... + a_2X^{20}$. Atunci $a_{2k+1} = -a_{2k+1}$ deci $a_{2k+1} = 0$, $\forall k = \overline{0,9}$. Rezultă că $a_7 = 0$.

Subiectul III

1. ***a)*** Cum $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$; deoarece $\lim\limits_{x \uparrow -4} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x \downarrow -4} f(x) = -\infty$, dreapta $x = -4$ este asimptotă verticală. Cum f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, nu există alte asimptote verticale.

b) $f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(n) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{n+3}{n+4} = \frac{4}{n+4}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n+4}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{4}}\right]^{\frac{4n}{n+4}} = e^4$.

c) Avem $f(x) = 1 - \frac{1}{x+4}$, deci $f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2} > 0$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $(-4, \infty)$.

Cum $x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{x_n + 4}$, $x_1 = 1 > 0$, rezultă că $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătăm prin inducție că $(x_n)_n$ este descrescător: $x_2 = f(1) = \frac{4}{5} < x_1$ și dacă $x_n < x_{n-1}$, obținem din monotonia lui f că $f(x_n) < f(x_{n-1})$, deci $x_{n+1} < x_n$. Cum $(x_n)_n$ este descrescător și $0 < x_n \leq x_1 = 1$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $(x_n)_n$ este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Atunci $l = \frac{l+3}{l+4} \Rightarrow l^2 + 3l - 3 = 0 \Rightarrow l = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$. Cum $l > 0 \Rightarrow l = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$.

2. ***a)*** $A = \int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 |x^2 - 4x + 3|\, dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

b) $\int_1^2 (x-2) f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (2x - 4) f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f'(x) f^2(x) dx = \frac{1}{6} f^3(x) \Big|_1^3 = 0$, deoarece $f(3) = f(1) = 0$.

c) $I_{n+1} = \int_1^3 (x-2)' f^{n+1}(x)\, dx = (x-2) f^{n+1}(x) \Big|_1^3 - (n+1) \int_1^3 (x-2) f^n(x)(2x-4)\, dx =$
$= -2(n+1) \int_1^3 (x^2 - 4x + 4) f^n(x) dx = -2(n+1) \int_1^3 (f(x) + 1) f^n(x) dx = -2(n+1) I_{n+1} - 2(n+1) I_n$.

Deci $(2n+3) I_{n+1} = -2(n+1) I_n$, de unde $\frac{I_{n+1}}{I_n} = -\frac{2(n+1)}{2n+3}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = -1$.

Testul 19

Subiectul I

1. Avem $\frac{z^2 + z + 1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow$
$\Rightarrow (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{z\bar{z}}\right) = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

2. Imaginea funcției f este $\left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right) = [4, \infty)$. Deci $B = [4, \infty)$.

3. Pentru $x > 0$ ecuația se scrie $x^2 + x^{\log_2 8} - 12 \Leftrightarrow x^2 + x^3 = 12$. Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x^3$ este strict crescătoare, deci injectivă, iar $f(2) = 12$; rezultă că $x = 2$ este unica soluție a ecuației.

4. Dezvoltarea are 9 termeni, deci cel din mijloc, este $T_5 = C_8^4 x^4 = 70x^4$. Cum $T_5 = 70$, rezultă $x^4 = 1$, deci $x = \pm 1$. **5.** $\overline{AC} + \overline{EF} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{EF} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, deci $|\overline{AC} + \overline{EF}| = |\overline{AB}| = 1$.

6. Avem $\text{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{b+c-a} = 1$. Rezultă că $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{4}$, deci $A = \frac{\pi}{2}$.

Subiectul II

1. ***a)*** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. Sistemul are soluții nenule $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

b) Cum orice soluție cu proprietatea din enunț este nenulă, rezultă că $m = -1$. Cum $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rezultă că rangul lui A este 2, deci sistemul este compatibil nedeterminat, cu necunoscuta secundară z. Pentru $z = \alpha \in \mathbb{R}$ sistemul devine: $\begin{cases} x + y = \alpha \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\alpha, y = -\alpha$. Deci $x_0 = 2\alpha$, $y_0 = -\alpha$, $z_0 = \alpha$, de unde $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6\alpha^2$. Obținem $\alpha^2 = 1$, deci $\alpha = \pm 1$ și soluțiile $(2, -1, 1)$ și $(-2, 1, -1)$.

2. ***a)*** Avem $f_a = (x^2 - a^2)c + r$ cu $c, r \in \mathbb{R}[x]$ și grad $r \leq 1$. Dacă $a = 0$, cum $f_0 = 2X^{12}$, rezultă că $r = 0$ deoarece X^2 divide f_0. Dacă $a \neq 0$ și $r = pX + q$ cu $p, q \in \mathbb{R}$, atunci $f(a) = pa + q$, $f(-a) = -pa + q$, de unde $pa + q = (2a)^{12}$ și $-pa + q = (2a)^{12}$. Rezultă $p = 0$ și $q = 12^{12} \cdot a^{12}$, deci $r = 2^{12} a^{12}$.

b) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ o rădăcină reală a lui f_a. Cum $(\alpha + a)^{12} + (\alpha - a)^{12} = 0$, rezultă că $\alpha + a = \alpha - a = 0$, deci $\alpha = a = 0$. Atunci $f_a = f_0 = 2X^{12}$ și 0 este rădăcină multiplă de ordinul 12.

c) Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = u + vi$ o rădăcină a lui f, cu u și $v \in \mathbb{R}$. Cum $(z + a)^{12} = -(z - a)^{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow |(z + a)^{12}| = |(z - a)^{12}| \Rightarrow |z + a|^{12} = |z - a|^{12} \Rightarrow |z + a| = |z - a| \Rightarrow |u + a + vi| =$
$= |u - a + vi| \Rightarrow (u + a)^2 + v^2 = (u - a)^2 + v^2 \Rightarrow 4au = 0 \Rightarrow u = 0$, deci $\text{Re}(z) = 0$.

Subiectul III

1. ***a)*** Avem $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deoarece mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}$

$\mid \cos x = 1\} = \{2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ nu conține niciun interval nedegenerat, rezultă că f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)}{\sin^3 x}\cdot\dfrac{\sin^3 x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\dfrac{f(\sin x)}{\sin^3 x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y^3} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y-\sin y}{y^3}$. Cu teorema lui L'Hôspital avem $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y-\sin y}{y^3} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{3y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{6y} = \dfrac{1}{6}$, deci limita cerută este $\dfrac{1}{6}$.

c) Avem $x_1 = f(x_0) = f(1) = 1 - \sin 1 < 1 = x_0$. Presupunem că $x_n < x_{n-1}$. Cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x_n) < f(x_{n-1})$, deci $x_{n+1} < x_n$, adică șirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este strict descrescător. Cum $x_1 = 1 > 0$, în ipoteza că $x_n > 0$ obținem $f(x_n) > f(0)$, deci $x_{n+1} > 0$. Rezultă că șirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este mărginit inferior, deci mărginit. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Cum $x_n \in (0, 1) \Rightarrow l \in [0, 1]$ și $l = l - \sin l$, deci $\sin l = 0$. Rezultă $l = 0$.

2. ***a)*** Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F''(x) = f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este concavă.

b) Cu schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{x+1} = t$ obținem $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x+1}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{arctg}\,t\,dt =$
$= \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t'\,\mathrm{arctg}\,t\,dt = t\,\mathrm{arctg}\,t\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$.

c) Fie $x > 0$. Cum f este continuă, din teorema de medie rezultă că există $c_x \in (x, x + 2)$ astfel încât $\displaystyle\int_x^{x+2} f(t)\,dt = f(c_x)(x+2-x) = 2f(c_x)$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} c_x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_x^{x+2} f(t)\,dt = 0$.

Testul 20

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ progresia aritmetică cu $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Dacă $x = a_n$, atunci $a_n = a_1 + (n-1)r = 4n - 3$. Atunci $496 = S_n = n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2} = n\dfrac{1+4n-3}{2} = n(2n-1)$. Obținem $2n^2 - n - 496 = 0$ cu soluțiile $n_1 = 16$ și $n_2 = -\dfrac{31}{2}$. Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă $n = 16$, deci $x = 61$. **2.** Fie $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Rezultă că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, deci $x_1^4 = x_2^4$, de unde $x_1 = x_2$. **3.** Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} + \log_2 x$, este strict crescătoare, deci injectivă. Cum $f(8) = \sqrt{9} + \log_2 8 = 6$ rezultă că $x = 8$ este unica soluție a ecuației.

4. Avem $T_{k+1} = C_7^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-k}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^k \ge \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-k}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^k = \left(\dfrac{1}{3}\right)^7 = T_8$, cu egalitate $\Leftrightarrow$ $C_7^k = 1$ și $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-k} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-k}$ $\Leftrightarrow$ $k = 7$. Deci cel mai mic termen este T_8. **5.** Avem $AB = \sqrt{9+16} = 5$ și $AC = \sqrt{16+9} = 5$, deci triunghiul este isoscel de bază $[BC]$. Notând $M\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ mijlocul laturii BC, cum bisectoarea din A este și mediană, rezultă că lungimea bisectoarei este $AM = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Cum $\cos 178° = -\cos 2°$, $\cos 174° = -\cos 6°$,... $\cos 94° = -\cos 86°$, rezultă că suma este egală cu $\cos 90°$, deci este 0.

Subiectul II

1. ***a)*** $\det(A) = \begin{vmatrix} a^2 & -b^2 & 1 \\ a^2+1 & -b^2+1 & 2 \\ a^2+2 & -b^2+2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & -b^2 & 1 \\ a^2+b^2 & -b^2+1 & 2 \\ a^2+b^2 & -b^2+2 & 4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & -b^2 & 1 \\ 1 & -b^2+1 & 2 \\ 1 & -b^2+2 & 4 \end{vmatrix} =$
$= (a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & -b^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$.

b) Dacă $a \ne 0$ sau $b \ne 0 \Rightarrow \det(A) \ne 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. Dacă $a = b = 0$ sistemul devine $\begin{cases} z = 1 \\ x+y+2z = 2 \\ x+y+2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x+y = 0 \end{cases}$ cu soluția $(\alpha, -\alpha, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Așadar, sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = b = 0$.

c) Fie x_0, y_0, z_0 o soluție a sistemului. Scăzând prima ecuație din a doua obținem: $x_0 + y_0 + z_0 = 1$, deci $x_0 + y_0 + z_0 \ne 2012$.

2. ***a)*** $\left(1-\dfrac{1}{x_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_4}\right) = \dfrac{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)}{x_1x_2x_3x_4} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) =$
$= f(1) = -2$, deoarece $f = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$ și $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

b) Fie $i = \overline{1,5}$. Deoarece $x_i^4 = 4x_i - 1$, rezultă că $x_i^5 = 4x_i^2 - x_i$. Adunând cele 5 relații obținem $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4) = 0$, de unde $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$.

c) Deoarece $f(-1) = 6 > 0$; $f(1) = -2 < 0$; $f(2) = 25 > 0$ și funcția polinomială a lui f este continuă, rezultă că f are două rădăcini reale $x_1 \in (-1, 1)$ și $x_2 \in (1, 2)$. Dacă toate rădăcinile lui f ar fi reale, ar rezulta că $0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > 0$, fals și cum numărul rădăcinilor nereale ale lui f este par, rezultă că f are exact două rădăcini reale.

Subiectul III

1. ***a)*** Deoarece f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f(-a) = f(a)$, $a > 0$ rezultă că se poate aplica teorema lui Rolle pe orice interval de forma $[-a, a]$ cu $a > 0$.

b) Cum f este pară, va fi suficient să determinăm imaginea lui f pe $[0, \infty)$. Cum $f'(x) = 20x^3 + 20x \ge 0$ și $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Cum f e continuă și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f(0) = 1$ rezultă că $f([0, \infty)) = [1, \infty)$, deci $\mathrm{Im}f = [1, \infty)$.

c) Avem $f(x) = \dfrac{(x+1)^5 - (x-1)^5}{2}$, de unde $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^5 - (k-1)^5\right) = \frac{(n+1)^5 + n^5 - 1}{2}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{n^5}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - n^5}{n^5}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{(n+1)^5 - n^5 - 1}{2n^5}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5 - n^5 - 1}{2n^4}} = e^{\frac{5}{2}}$.

2. ***a)*** Cu schimbarea de variabilă $\ln x = t$ avem $\displaystyle\int_1^{e^\pi}\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx = \int_0^{\pi}\cos t\,dt = \sin t\,\Big|_0^{\pi} = 0$.

b) Deoarece $\ln x \in [0, 1] \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru $x \in [1, e]$, rezultă că $f(x) > 0$ pentru $x \in [1, e]$. Atunci $A = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e x'\cdot\cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x)\,\Big|_1^e + \int_1^e x\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= e\cos 1 - 1 + \int_1^e \sin(\ln x)\,dx = e\cos 1 - 1 + \int_1^e x'\sin(\ln x)\,dx = e\cos 1 - 1 + x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= e\cos 1 - 1 + e\sin 1 - A$. Obţinem $A = \frac{1}{2}e(\cos 1+\sin 1) - \frac{1}{2}$.

c) Cum $\ln x \in [1, 2]$ pentru $x \in [e, e^2]$, rezultă că $f(x) \in [\cos 2, \cos 1]$ pentru $x \in [e, e^2]$. Deoarece $\cos 2 < 0$ şi $\cos 1 < |\cos 2|$, avem $|f(x)| \le |\cos 2|$, $\forall x \in [e, e^2]$. Atunci:

$$\left|\int_e^{e^2} f^n(x)\,dx\right| \le \int_e^{e^2}|f^n(x)|\,dx \le \int_e^{e^2}|\cos 2|^n\,dx = (e^2-e)|\cos 2|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \text{ deci } \lim_{n\to\infty}\int_e^{e^2} f^n(x)\,dx = 0$$

Testul 21

Subiectul I

1. E suficient ca $\log_2 3 > 1$. Într-adevăr, $1 = \log_2 2 < \log_2 3$. **2.** $f(1) = 3 - 1 = 2$, $f(f(1)) = f(2) = 6 - 1 = 5$.
3. Notăm $2^x = t$, $t > 0$. Ecuaţia se scrie $t^2 + t - 72 = 0$, cu soluţiile $t_1 = 8$ şi $t_2 = -9$. Cum $t > 0$, rămâne $2^x = 8$, de unde $x = 3$.
4. Avem $A_n^2 = n(n-1) = 11\cdot 10$. Rezultă $n = 11$.
5. Panta dreptei $x + y - 1 = 0$ este -1, deci panta perpendicularei este 1. Atunci $y - y_A = 1(x - x_A) \Leftrightarrow y = x$ este ecuaţia cerută.
6. Triunghiul e dreptunghic, cu aria $S = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ şi semiperimetrul $p = \frac{12}{2} = 6$, deci $r = \frac{S}{p} = 1$.

Subiectul II

1. *a)* $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Avem $\sigma^3 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi deci $\sigma^m = \sigma^{m(\mathrm{mod}\,3)}$, adică $M = \{e, \sigma, \sigma^2\}$. Notă: σ, σ^2, e sunt distincte.

c) Observăm că $\tau(2) = 2$, deci $\tau^n(2) = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\sigma^m(2) = 2$. Cum $\sigma(2) = 3 \ne 2$, $\sigma^2(2) = 1 \ne 2$ şi $e(2) = 2$, deducem că m este multiplu de 3 şi apoi $\sigma^m = e$. Cum $\tau^2 = e$, din $\tau^n = e$, deducem că n este par. Aşadar 6 divide mn.

2. *a)* $A(n)\cdot A(m) = \begin{pmatrix} 1+n+m & -m-n \\ m+n & 1-n-m \end{pmatrix} = A(n+m)$.

b) Conform punctului anterior, cum $n + m \in \mathbb{Z}$ rezultă că M e parte stabilă a mulţimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ faţă de înmulţire. Operaţia e asociativă, are elementul neutru $I_2 = A(0) \in M$, iar inversul elementului $A(n)$, unde $n \in \mathbb{Z}$, este $A(-n)$, deoarece $-n \in \mathbb{Z}$ şi $A(n)\cdot A(-n) = A(-n)A(n) = A(0)$.
c) Avem $f(n + m) = f(n)\cdot f(m)$, conform *a)*. Funcţia este inversabilă, deoarece $A(n) = A(m)$ dacă şi numai dacă $n = m$.

Subiectul III

1. *a)* $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.
b) Avem $f'(0) = -1$. Ecuaţia tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$.
c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$, deci $y = 0$ este asimptota orizontală către $+\infty$. Pe de altă parte,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - 1\right) = -2$ şi $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (-2)x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$, deci $y = -2x$ este asimptota oblică spre $-\infty$. Funcţia f e continuă, deci nu admite asimptote verticale.

2. *a)* $I_1 = \int_0^1 x\sin x\,dx = -\int_0^1 x(\cos x)'\,dx = -x\cos x\Big|_0^1 + \int_0^1 x'\cos x\,dx = -\cos 1 + \sin x\Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$.

b) Avem $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sin x\,dx$. Cum $x^n(x - 1) \le 0$ şi $\sin x \ge 0$ pentru $x \in [0, 1]$, funcţia de sub integrală este negativă, deci $I_{n+1} - I_n \le 0$, $n \ge 1$.

c) Deoarece $0 \le \sin x \le 1$, avem $0 \le x^n \sin x \le x^n$, deci $0 \le I_n \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$, de unde $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Testul 22

Subiectul I

1. $a_1 = -10$, $a_{10} = a_1 + 9r = -10 + 18 = 8$, deci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10 = \frac{-10+8}{2}\cdot 10 = -10$.

2. $x_V = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}$, $y_V = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8}$. **3.** $-1 = \log_2(x+1) \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

4. Sunt $A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ submulţimi. **5.** De exemplu $(1, 2)$.

6. Avem $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\cos a > 0$, deci $\cos a = \frac{4}{5}$.

Subiectul II

1. *a)* Din prima ecuaţie avem $-2 + 1 + m = 0 \Rightarrow m = 1$. *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + m - 1 + 2m - 1 - 1 = 3m - 1$.

c) Rangul matricei sistemului este 2, având ca minor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. Minorul caracteristic este

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \ne 0$, deci sistemul este incompatibil.

2. *a)* $x \circ x = x^2 + 2x$, deci ecuaţia este $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -4$.
b) Avem $(x \circ y) \circ z = (x \circ y)z + x \circ y + z = (xy + x + y)z + xy + x + y + z = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$ şi $x \circ (y \circ z) = x(y \circ z) + x + y \circ z = xyz + yz + xz + xy + x + y + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, deci operaţia e asociativă.
c) Scriem $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$. Pentru $x, y > -1$ avem $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$, deci $(x + 1)(y + 1) > 0$ şi $x \circ y > -1$, q.e.d.

Subiectul III

1. *a)* Arătăm prin inducţie că $a_{n+a} - a_n > 0$. Avem $a_2 = \sqrt{13} > 1 = a_1$. Cum $a_2 - a_1 > 0$, din $a_{n+1} - a_n = \sqrt{12 + a_n} - \sqrt{12 + a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{12+a_n} + \sqrt{12+a_{n-1}}}$ rezultă cerinţa.

b) Evident $a_1 < 4$. Prin inducţie, din $a_n \le 4$ deducem $a_{n+1} \le \sqrt{12 + 4} = 4$, ceea ce trebuie arătat.

c) Şirul este convergent conform teoremei lui Weierstrass. Notăm $l = \lim_{x\to\infty} a_n$ şi observăm că $l \geq 0$, deoarece $a_n \geq 0$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem $l = \sqrt{12+l} \Rightarrow l^2 - l - 12 = 0 \Rightarrow l = 4$ (cazul $l = -3$ nu convine).

2. *a)* $\int_0^1 e^x f(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 xe^{-x}dx = \int_0^1 x\cdot(-e^{-x})'dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 x'e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e}+1\right) = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$.

c) Aplicând teorema lui l'Hôspital, obţinem $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$.

Testul 23

Subiectul I

1. Avem $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} = 1 + \sqrt[3]{8} = 1 + 2 = 3$.

2. $f(-10) + f(-9) + ... + f(9) + f(10) = -28 - 25 + ... + 29 + 32$. Suma are 21 de termeni în progresie aritmetică (de raţie 3), deci este egală cu $\frac{-28+32}{2}\cdot 21 = 2\cdot 21 = 42$.

3. Avem $2^{3(x+1)} = 2^{2(1-x)} \Leftrightarrow 3x+3 = 2-2x \Leftrightarrow 5x = -1$, deci $x = -1/5$.

4. Avem soluţiile $x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ şi $x_2 = \pi - x_1 = \frac{2\pi}{3}$.

5. $|\vec{v}_1| = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$; $|\vec{v}_2| = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$, de unde rezultă cerinţa.

6. $BC^2 = 3^2 + 7^2 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot\cos 120° = 9 + 49 + 2\cdot 21\cdot\frac{1}{2} = 79$, deci perimetrul este $10+\sqrt{79}$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A = 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, deci rang$A$ = 2; rang$B$ = 1, deoarece toţi minorii de ordin 2 sunt nuli şi $B \neq O_2$. Cerinţa rezultă.

b) $\det(A+xB) = \begin{vmatrix} x-2 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x-2 & x+1 \\ x+1 & x+1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x-2 & x+1 \\ 3x & 3x & 3x \end{vmatrix} = 3x\begin{vmatrix} x-2 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x-2 & x+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3x\begin{vmatrix} -3 & 0 & x+1 \\ 0 & -3 & x+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 27x$; (am adunat liniile la ultima linie; am dat factor comun şi am scăzut ultima coloană din precedentele două). Obţinem $x = 0$.

c) Avem $AB = O_3 = BA$, deci matricele comută. Cu binomul lui Newton, $(A+B)^n = A^n + C_n^1A^{n-1}B + ... + C_n^{n-1}AB^{n-1} + B^n = A^n + B^n$, termenii intermediari fiind nuli.

2. *a)* $f = X(X^2-1)-1$, deci restul împărţirii lui f la X^2-1 este polinomul $r = -1$.

b) Dacă x_k este rădăcină a polinomului f, $k = 1,2,3$, atunci $x_k^3 - x_k - 1 = 0 \Leftrightarrow x_k^3 = x_k + 1$, de unde rezultă că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 3$

c) $f(x_1+x_2) = f(-x_3) = -x_3^3 + x_3 - 1 = -(x_3^3 - x_3 - 1) - 2 = -f(x_3) - 2 = -2$.

Subiectul III

1. *a)* $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. *b)* $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x > -1$, deci f este convexă.

c) Funcţia f' este strict crescătoare, deoarece $f'' > 0$. Cum $f'(0) = 0$, rezultă tabelul de variaţie:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	– – – – – – – – – –	0	+ + + + + + + + + +
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Deoarece $f(0) = 0$, rezultă $f(x) \geq 0$, $\forall x > -1$.

2. *a)* $\int_1^2 f(x)\,dx = \ln(x+1)\Big|_1^2 - \ln x\Big|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 - \ln 2 + \ln 1 = \ln 3 - \ln 4 = \ln\frac{3}{4}$.

b) $\int_1^{\sqrt{3}} f(x^2)\,dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$.

c) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = \ln(x+1)\Big|_{\frac{1}{a}}^{a} - \ln x\Big|_{\frac{1}{a}}^{a} = \ln(a+1) - \ln\frac{1+a}{a} - \ln a + \ln\frac{1}{a} = \ln a - \ln a - \ln a = -\ln a$. Rezultă $\ln a = 1$, deci $a = e$.

Testul 24

Subiectul I

1. $\frac{1}{\sqrt{2}-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-4} = -\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in (-2,-1)$, deci $\left[\frac{1}{\sqrt{2}-2}\right] = -2$. **2.** $x_V = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4$.

3. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **4.** Sunt 7 termeni, cel din mijloc este $T_4 = C_6^3\cdot 1^3(\sqrt[3]{2})^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 40$.

5. $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. **6.** $\operatorname{tg}^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{\sin^2 a}{1-\sin^2 a} = \frac{0,36}{0,64} = \frac{9}{16}$.

Subiectul II

1. *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rang$A^2 = 1$.

b) Avem $(I_3 - A)(I_3 + A + A^3) = I_3 + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_3 - A^3 = I_3$, deoarece $A^3 = O_3$.

c) Inversa matricei $I_3 + A$ este $I_3 - A + A^2$, deoarece $(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3 + A^3 = I_3$.

2. *a)* $f_1 = X^2 + X + 1$. Avem $\Delta = -3$ şi $x_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) $f_2 = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = f_1(X^2 - X + 1)$. Câtul este $X^2 - X + 1$.

c) f_1 divide $f_n \Leftrightarrow f_n(x_1) = 0$, deoarece $f_n \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_2 = \overline{x_1}$. Cum $x_1^3 = 1$, avem:

$$f_n(x_1) = x_1^{2n} + x_1^n + 1 = \begin{cases} x_1^2 + x_1 + 1 = 0, & \text{dacă } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ x_1 + x_1^2 + 1 = 0, & \text{dacă } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ 1+1+1 \neq 0, & \text{dacă } 3 \text{ divide } n \end{cases}$$

Cerinţa este demonstrată.

Subiectul III

1. *a)* $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} = \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n+1}+...+\frac{1}{2^{n+1}}$. Ultima sumă are

2^n termeni, fiecare mai mare decât $\frac{1}{2^{n+1}}$, deci $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$.

b) $a_{2^n} = \left(a_{2^n} - a_{2^{n-1}}\right) + \left(a_{2^{n-1}} - a_{2^{n-2}}\right) + \ldots + \left(a_{2^2} - a_{2^1}\right) + a_2 \geq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n-1 \text{ ori}} + 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$, $\forall n \geq 1$.

c) Avem $n = 2^{\log_2 n} \geq 2^{[\log_2 n]}$, deci $a_n \geq a_{2^{[\log_2 n]}} \geq 1 + \frac{[\log_2 n]}{2} \geq 1 + \frac{\log_2 n - 1}{2} = \frac{1 + \log_2 n}{2}$, $\forall n \geq 4$, deoarece şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 n = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2. *a)* De exemplu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \text{arctg}x$.

b) $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \text{arctg}\, x \,dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}\, x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{arctg}\, x\Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{4}$.

c) $\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx = x^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^3)' f(x)\,dx = \frac{1}{2} - 3\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} - 3\,(1 - \text{arctg}\, x)\Big|_0^1 = \frac{3\pi - 10}{4}$

Testul 25

Subiectul I

1. Avem $10^{\lg 7} = 7$, deci $100^{\lg 7} = (10^{\lg 7})^2 = 49 \in \mathbb{N}$. **2.** Punctul de maxim este abscisa vârfului $x_V = -\frac{2}{2(-1)} = 1$. **3.** $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^3 + 1 = y^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y$ sau $x^2 + xy + y^2 = 0$. Cum $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(x + y)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$, rezultă cerinţa. Alternativ, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, deci f strict crescătoare. **4.** $C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35$.

5. $BC : \frac{y-3}{x-2} = \frac{5-3}{-1-2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x + 3y - 13 = 0$. Distanţa este $\frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 1 - 13|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$.

6. $2R = \frac{AB}{\sin C} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A = 1$. *b)* $B \neq O_{2,3}$ şi liniile lui B sunt proporţionale $\Rightarrow \text{rang}B = 1$.

c) Avem $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. *a)* $z_1 z_2 z_3 = -(-1) = 1$.

b) Cum $|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3| = 1$ şi $|z_1|, |z_2|, |z_3| \geq 1$, rezultă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

c) Polinomul are coeficienţi reali şi grad impar, deci are cel puţin o rădăcină reală, de modul 1, adică 1 sau -1. Cum $f(0) = -1 < 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ rezultă $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b - 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$.

Subiectul III

1. *a)* $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$. *b)* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = \infty + \infty = \infty$.

c) Deoarece $f' < 0$, funcţia este strict descrescătoare, deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$, din continuitatea lui f rezultă că imaginea funcţiei este $\mathbb{R}$, deci funcţia f este surjectivă. Ca urmare, există un unic $c \in (0, \infty)$ astfel încât $f(c) = 0 \Leftrightarrow c \cdot \ln c = 1$.

2. *a)* $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx = -\sqrt{4 - x^2}\Big|_0^1 = -\sqrt{3} + 2$.

b) $\int_0^1 f(x)\cdot \arcsin\frac{x}{2}\,dx = \int_0^1 \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)' \cdot \arcsin\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin^2\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$.

c) Cu schimbarea de variabilă $t = -x$, $dt = -dx$, avem $\int_{-1}^0 f(x^2)\,dx = -\int_1^0 f((-t)^2)\,dt = \int_0^1 f(t^2)\,dt$.

Testul 26

Subiectul I

1. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Avem $a + bi + 2(a - bi) = 9i \Leftrightarrow 3a = 0$ şi $-b = 9 \Leftrightarrow a = 0, b = -9$, deci $z = -9i$.
2. $x^2 - 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$. Cum $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, rezultă cerinţa.
3. $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, deci $x = 2$. **4.** Sunt $2^5 = 32$ submulţimi ale lui M şi $C_5^3 = 10$ cu 3 elemente. Probabilitatea este $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$. **5.** $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 4$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_C = 3$.

6. $\text{tg}\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, \pi/3}{1 - \text{tg}a\, \text{tg}\pi/3} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 8 + 5\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. *a)* $\det(A + t_A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$. *b)* $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; avem $AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$, deci $b = c$ şi $a = b + d$. Atunci $B = \begin{pmatrix} b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$ şi $\det B = d^2 + bd - b^2$. Dacă $\det B = 0$, arătăm că $b = d = 0$, adică $B = O_2$. Presupunem că $d^2 - db - b^2 = 0$. Ca ecuaţie în d, discriminantul este $\Delta = 5b^2$, deci $d = \frac{b \pm \sqrt{5}\cdot b}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot b$. Cum $b, d \in \mathbb{Q}$, deducem $b = d = 0$. În concluzie $\text{rang}B \neq 1$.

2. *a)* Fie $t \in M$ şi $x \in \mathbb{R}$. Avem $f(x - t) = f((x - t) + t) = f(x)$, deci $-t \in M$.
b) Fie $t_1, t_2 \in M$ şi $x \in \mathbb{R}$. Din $f(x) = f(x + t_1) = f(x + t_1 - t_2)$ rezultă $t_1 - t_2 \in M$, deci $M \leq (\mathbb{R}, +)$.
c) De exemplu, funcţia parte fracţionară.

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\text{arctg}\, x}{x^2 + x + 1} = \frac{\pi/4}{3} = \frac{\pi}{12}$. *b)* $f'(x) = \text{arctg}\, x + \frac{x-1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}\text{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\text{arctg}\, x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\text{arctg}\, x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = -1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{\pi}{2}x\right) = -1 - \frac{\pi}{2}$,

deci dreapta de ecuaţie $y = \frac{\pi}{2}x - 1 - \frac{\pi}{2}$ este asimptota oblică a graficului către $+\infty$.

2. a) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx = \int_0^1\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx = 1-4\cdot\frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{x}{2}\Big|_0^1 = 1-2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1\frac{(x^4+2)'}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+2)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

c) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+4} = \sigma(f,\Delta_n,\xi)$, adică suma Riemann asociată funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+4}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n}{n}=1\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_k^n=\frac{k}{n}$, $k=\overline{1,n}$. Așadar $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,dx$, deci șirul e convergent.

Testul 27

Subiectul I

1. $a_2=2, a_5=16, \Rightarrow q^3=\frac{a_5}{a_2}=8 \Rightarrow q=2$. **2.** $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=\frac{p^2+q^2}{pq}=\frac{(p+q)^2-2pq}{pq}=\frac{36-6}{3}=10$.

3. $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **4.** Sunt $2^6=64$ de submulțimi. Nu convin cele formate doar cu numere pare, și anume submulțimile mulțimii {2, 4, 6}. Acestea sunt $2^3=8$, deci rămân $64-8=56$ de submulțimi. **5.** $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=4\cdot4\cdot\cos\widehat{BAC}=16\cdot\cos60°=16\cdot\frac{1}{2}=8$.

6. Avem $\sin^2 a=\frac{\sin^2 a}{\sin^2 a+\cos^2 a}=\frac{\text{tg}^2 a}{1+\text{tg}^2 a}=\frac{1/9}{1+1/9}=\frac{1}{10}$.

Subiectul II

1. a) $A\neq O_3$ și liniile lui A sunt proporționale $\Rightarrow$ rang$A=1$.
b) Avem $A^2=14A$. Prin inducție, $A^{n+1}=A^n\cdot A=(14^{n-1}A)A=14^{n-1}A^2=14^{n-1}\cdot14A=14A^n$.
c) Deoarece $(I_3-A)\left(I_3-\frac{1}{13}A\right)=I_3-A-\frac{1}{13}A+\frac{1}{13}A^2=I_3-A-\frac{1}{13}A+\frac{14}{13}A=I_3$, concluzia rezultă.

2. a) $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2+a\sqrt{2}+b=(b+2)+(a+2)\sqrt{2}=0$. Dar $a,b\in\mathbb{Z}$ și $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, deci $a=b=-2$.
b) $f(1)=0\Rightarrow 2+a+b=0, f'=3x^2+2x+a$, deci $f'(1)=0\Rightarrow 5+a=0$. Obținem $a=-5$ și $b=3$.
c) Dacă r este rădăcină triplă, din $x_1+x_2+x_3=-1$ rezultă $r=-\frac{1}{3}$. Atunci $b=-x_1x_2x_3=\frac{1}{27}\notin\mathbb{Z}$, contradicție cu $b\in\mathbb{Z}$.

Subiectul III

1. a) $f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+1=\frac{2\ln x-1}{x}+1$, deci $f'(1)=0$.

b) Avem $f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x-1)}{x^2}=\frac{3-2\ln x}{x^2}$ și $f''(x)=0\Leftrightarrow x=e^{3/2}$.

c) Avem $\lim_{x\to\infty}f'(x)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x-1}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1$. Studiem tabloul de variație al funcției f':

x	0	1	$e^{3/2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+ + + + + + + + + + +		0	− − − − − − −

și respectiv, tabloul de variație al funcției f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	− − − − −	0	+ + + + +

$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	(max)	↘	1

$f(x)$	$-\infty$	↘	0	↗	1

Așadar, $x=1$ este singurul punct de extrem (minim) al funcției f.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}\,dx=\int_1^2\frac{t-1}{t^2}\,dt=\left(\ln t+\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2=\ln2+\frac{1}{2}-1=\ln2-\frac{1}{2}$, cu schimbare de variabile $t=x+1$, $dt=dx$.

b) $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^n(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx=\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$.

c) Avem $I_n\geq0$, deoarece $\frac{x^n}{(x+1)^2}\geq0$, $\forall x\in[0,1]$ și $n\geq1$. Atunci $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$, de unde $\lim_{n\to\infty}I_n=0$.

Testul 28

Subiectul I

1. $z=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1-2i-1}{2}=i$, deci $\text{Re}\,z=0$. **2.** $x_1+x_2=5, x_1x_2=2$, deci $x_1+x_2-x_1x_2=3$.
3. $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x^2+x=y^2+y\Leftrightarrow(x_1-y)(x+y+1)=0\Leftrightarrow x=y$, deoarece $x+y+1>0$ pentru orice $x,y\in[0,1]$. **4.** $C_{100}^{50}=\frac{100!}{50!\cdot50!}$; $2\,C_{99}^{50}=2\cdot\frac{99!}{49!\cdot50!}=\frac{100}{50}\cdot\frac{99!}{49!\cdot50!}=\frac{100!}{50!\cdot50!}$, ceea ce trebuia arătat.

5. $|\overline{DA}+\overline{AB}|=|\overline{DB}|=DB=2$. **6.** Avem $x=\frac{5\pi}{6}$, deci $\text{tg}\,2x=\text{tg}\frac{5\pi}{3}=\text{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c+a\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

b) Deoarece a, b, c sunt distincte, rezultă că numerele $b-a$, $c-a$ și $c-b$ sunt nenule și deci $\Delta\neq0$. Cerința rezultă din teorema lui Cramer.
c) Polinomul $f(t)=x+ty+t^2z-t^3$ are rădăcinile distincte a, b, c. Din relațiile lui Viète rezultă $z=a+b+c$, $y=-ab-bc-ca$, $x=abc$.
2. a) Avem soluțiile $x=\hat{3}$ și $x=\hat{9}$.
b) Dacă $x^2=\hat{1}$, atunci $x\in U(\mathbb{Z}_{12})=\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\hat{9}\}$. Toate cele 4 numere verifică ecuația.
c) Dacă $x^{11}=\hat{1}$, atunci $x\in U(\mathbb{Z}_{12})$, deci $x^2=\hat{1}$. Atunci $x^{10}=\hat{1}$, deci $x^{11}=\hat{1}\Leftrightarrow x^{10}\cdot x=\hat{1}\Leftrightarrow x=\hat{1}$.

Subiectul III

1. a) Funcția f e continuă, deci nu are asimptote verticale, $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, deci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală a graficului spre $\pm\infty$.
b) $f'(x)=m\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, deci $f'(0)=m$. Rezultă $m=1$.
c) Avem $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$. Pentru $m>0$, alcătuim tabloul de variație al funcției f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	− −	− − −	0	+ + +	0	− − −	− −
$f(x)$	0	↘	$-\frac{m}{2}$	↗	$\frac{m}{2}$	↘	0

Din tabel, deducem că $|f(x)|\leq\frac{|m|}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci valorile căutate sunt $m\in[-2,2]$.

2. *a)* $F(1)=\int_0^1 f(t)\,dt=\left(\frac{t^3}{3}+e^t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+e-1=e-\frac{2}{3}$.

b) Avem $F(x)=\left(\frac{t^2}{2}+e^t\right)\Big|_0^x=e^x+\frac{x^3}{3}-1$. $F'=f>0$, deci F este strict crescătoare; $\lim_{x\to\infty}F(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$, deci $F(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Funcția F este injectivă și surjectivă, deci este inversabilă.

c) Cu schimbarea de variabilă $t=F^{-1}(x)$ avem $x=F(t)$, $dx=f(t)\,dt$, $F^{-1}(0)=0$ și $F^{-1}\left(e-\frac{2}{3}\right)=1$, deci

$$\int_0^{e-\frac{2}{3}}F^{-1}(x)\,dx=\int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}\left(e-\frac{2}{3}\right)}t f(t)\,dt=\int_0^1 t f(t)\,dt=\int_0^1 t^3\,dt+\int_0^1 te^t\,dt=\frac{1}{4}+te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=\frac{1}{4}+e-e^t\Big|_0^1=\frac{5}{4}.$$

Testul 29

Subiectul I

1. $\sqrt[3]{64}=4$, $\lg 100=2$ și $\sqrt{17}>\sqrt{16}=4$, deci $\lg 100<\sqrt[3]{64}<\sqrt{17}$.

2. $\Delta=3^2-4\cdot4<0$, deci $4x^2+3x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **3.** $x+1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\Rightarrow x+1=1\Rightarrow x=0$.

4. $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, deci $2n+270=n^2-n\Leftrightarrow n(n-3)=18\cdot15$, de unde $n=18$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot2-3\cdot1=-1<0$, deci unghiul vectorilor este obtuz.

6. $m_a^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{25+49}{2}-\frac{36}{4}=37-9=28$, deci $m_a=2\sqrt{7}$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A(x)=\cos^2x+\sin^2x=1$.

b) $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\sin y\cos x-\sin x\cos y & 0\\ \sin y\cos x+\sin x\cos y & \cos x\cos y-\sin x\sin y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0\\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$.

c) Cum $A(x)\cdot A(-x)=A(x-x)=A(0)=I_3$, atunci $(A(x))^{-1}=A(-x)$, $x\in\mathbb{R}$, deci $\left(A\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1}=A\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. *a)* Ecuația se scrie $x(2x^2+x-13)=0$. Rezultă $x_1=0$ și $2x^2+x-13=0$; $x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{105}}{4}$.

b) $m_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{-13}{2}=\frac{1}{4}+13=\frac{53}{4}$.

c) Cum $x_1x_2x_3=-\frac{m}{2}$, rezultă $x_3=-\frac{m}{2}$, de unde $-\frac{m^3}{4}+\frac{m^2}{4}+\frac{13m}{2}+m=0$, adică $-m^3+m^2+30m=0$. Obținem $m_1=0$ sau $m^2-m-30=0$, de unde $m_2=-5$ și $m_3=6$. Cazul $m=0$ nu convine, conform lui a). Dacă $m=-5$, avem $x_3=-\frac{5}{2}$ și $2x^3+x^2-13x-5=(2x-5)(x^2+3x+1)$, rădăcinile polinomului x^2+3x+1 satisfac $x_1x_2=1$. Dacă $m=6$, avem $x_3=-3$ și $2x^3+x^2-13x-5=(x+3)(2x^2-5x+2)$, cu aceeași remarcă.

Subiectul III

1. *a)* Avem $f'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}<0$, $\forall x>0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală, deoarece $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, iar dreapta $x=0$ este asimptotă verticală, întrucât $\lim_{x\downarrow0}f(x)=+\infty$. Fiind continuă pe $(0,\infty)$, f nu admite alte asimptote verticale.

c) $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\infty$.

2. *a)* $\int_1^e\ln x\,dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x(\ln x)'\,dx=e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1$.

b) $\int_1^e e^xf'(x)\,dx=e^xf(x)\Big|_1^e-\int_1^e(e^x)'f(x)\,dx=e^e-\int_1^e e^xf(x)\,dx\Rightarrow\int_1^e e^x(f(x)+f'(x))\,dx=e^e$.

c) $\int_t^1 f(x)\,dx=x\ln x\Big|_t^1-\int_t^1 dx=-t\ln t-(1-t)=-1+t-t\ln t$. Cum $\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}t\ln t=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=0$, rezultă $\lim_{t\downarrow0}(-1+t-t\ln t)=-1$.

Testul 30

Subiectul I

1. $|z|=\sqrt{9+16}=5$. **2.** Rezolvăm ecuația $f(x)=0\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x_1=1$ și $x_2=2$. Punctele de intersecție sunt $A(1,0)$ și $B(2,0)$. **3.** Avem $\log_{25}2x=\frac{\log_5 2x}{\log_5 25}=\frac{1}{2}\log_5 2x$, deci ecuația se scrie: $2\log_5x=\log_52x\Leftrightarrow\log_5x^2=\log_52x\Leftrightarrow x^2=2x$, deci $x=2$, ținând cont că $x>0$. **4.** $C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$; $A_6^2=6\cdot5=30\Rightarrow C_7^3-A_6^2=5$. **5.** Panta dreptei d_1 este $m_1=1/2$. Panta dreptei d_2 este $m_2=-a$. Din $m_1=m_2$ obținem $a=-\frac{1}{2}$. **6.** Din $\sin x+\cos x=1$ rezultă $\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=1\Rightarrow\sin 2x=0$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A=3(1-a)$. *b)* Pentru $a\neq1$, $\operatorname{rang}A=3$. Dacă $a=1$, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\neq0$ implică $\operatorname{rang}A=2$. Deci $a=1$.

c) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. *a)* $f=X^2(X^2+1)-X+1=g\cdot(X^2+1)-X+1$. Restul împărțirii lui f la g este $-X+1$.

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{1}{1}=1$.

c) Pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$, avem $\alpha^2-\alpha+1>0$, deci $f(\alpha)=\alpha^4+(\alpha^2-\alpha+1)>0$. Ca urmare, f nu are nicio rădăcină reală.

Subiectul III

1. *a)* $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1/x}{1}=1=f(1)$, de unde rezultă cerința.

b) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=-\frac{1}{2}$. De aici rezultă și că f este derivabilă în $x=1$.

c) Avem $f'(x)=\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1,\ x>0$, şi $f'(1)=-\frac{1}{2}$. Considerăm funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=x-1-x\ln x$. Avem $g'(x)=-\ln x$ şi, din tabloul de variaţie alăturat, deducem că $g(x)<0$ pentru orice $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ şi, în consecinţă, $f'(x)<0$, $\forall x>0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +	0	− − − −
$f(x)$	−1 ↗	0	↘ $-\infty$

2. *a)* $\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$, deci $g\in M$. *b)* $\int_0^1 h(x)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+a=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+a$; $h\in M\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$.

c) Fie $f\in M$. Atunci $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}=\int_0^1 x\,dx\Rightarrow\int_0^1(f(x)-x)\,dx=0$. Conform teoremei de medie, există $c\in[0,1]$ astfel încât $f(c)-c=0$, ceea ce trebuia arătat.

Testul 31

Subiectul I

1. Avem $a=(2^{10})^{1/3}=2^{\frac{10}{3}}$, $b=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ şi $ab=2^{\frac{12}{3}}=2^4$. Cum $c=\sqrt{4}=2$, avem $ab=c^4$. **2.** Cum f este strict crescătoare, $\operatorname{Im} f=[f(1),f(2)]=[3,5]$. **3.** $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x-1}\Rightarrow x=-x-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.
4. Fie n numărul elementelor lui M. Avem 2^{n-1} submulţimi de cardinal impar, deci $2^{n-1}=32\Rightarrow n=6$.
5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$, D fiind mijlocul laturii BC. Cum $AD=AB\cdot\sin 60°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$, rezultă $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=3$. **6.** $\sin(x+\pi)=-\sin x\Rightarrow \sin x\sin(x+\pi)=-\sin^2x\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Subiectul II

1. *a)* $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=O_3$. *b)* $A\cdot A'=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi rang $AA'=2$.
c) Dacă există $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $B^2=A$, atunci $AB=BA$, deoarece $AB=B^2\cdot B=B^3=B\cdot B^2=BA$. Notând $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\u&v&t\end{pmatrix}$, avem $AB=\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&t\\0&0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&x&y\\0&u&v\end{pmatrix}$, deci $x=u=v=0$, $a=y=t$, $b=z\Rightarrow$ $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$. Avem $\det A=0\Rightarrow\det B^2=0\Rightarrow\det B=0\Rightarrow a=0$. Obţinem $B^2=\begin{pmatrix}0&0&b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq A$.
2. *a)* Suma coeficienţilor polinomului este $f(1)=(1-2)^{10}-1-2=-2$.
b) Polinomul are gradul 100, iar coeficientul lui X^{99} este 0, deci suma rădăcinilor este 0.
c) $f=(g+X)^{10}-X-2=g^{10}+C_{10}^1g^9X+\ldots+C_{10}^9gX^9+X^{10}-X-2=g\cdot(g^9+C_{10}^1g^8X+\ldots+C_{10}^9X^9+1)$ deci $g\mid f$.

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$.
b) Avem $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$. Derivata se anulează

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +	0	− − − −
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

în $x=1$; din tabelul de variaţie alăturat, rezultă cerinţa.
c) Prin inducţie, cum $f'(x)=(-1)^1(x-1)e^{-x}$ şi $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=(-1)^n e^{-x}-(-1)^n(x-n)e^{-x}=(-1)^{n+1}(x-(n+1))e^{-x}$, rezultă concluzia.
2. *a)* $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{2x+3}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{9}{4(2x+3)}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{9}{8}\ln(2x+3)\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}\ln\frac{5}{3}$.
b) $2I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\frac{x^n(2x+3)}{2x+3}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.
c) Deoarece $0\le x\le 1$, avem $0\le\frac{x^{n+1}}{2x+3}\le\frac{x^n}{nx+3}\Rightarrow 0\le I_{n+1}\le I_n$. Atunci $5I_n\ge 2I_{n+1}+3I_n\ge 5I_{n+1}$ $\Rightarrow 5I_n\ge\frac{1}{n+1}\ge 5I_{n+1}\Rightarrow\frac{n}{5(n+1)}\le nI_n\le\frac{1}{5}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{5}$.

Testul 32

Subiectul I

1. $|z|=\frac{2}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$. **2.** Avem $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-x-6=0$, de unde $x=-2$ şi $x=3$. Punctele sunt $A(-2,-2)$ şi $B(3,3)$. **3.** $\log_9 3=\frac{1}{2}$; $\log_x 2=\frac{1}{2}\Rightarrow x^{1/2}=2\Rightarrow x=4$. **4.** Suma este $(1+1)^{10}=2^{10}$, sau $C_{10}^0+C_{10}^1+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}$. **5.** Ecuaţia dreptei BC este $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-1}{3-1}\Leftrightarrow x-1=2(y-1)\Leftrightarrow x-2y+1=0$. Înălţimea din A are lungimea $\frac{|1-2\cdot 0+1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. **6.** Cum $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, rezultă $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Subiectul II

1. *a)* Fie $X=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$. Avem $AX=\begin{pmatrix}6x&6y+4x\\0&6x\end{pmatrix}=XA$.
b) $A^2=\begin{pmatrix}36&48\\0&36\end{pmatrix}$, $12A=\begin{pmatrix}72&48\\0&72\end{pmatrix}$, $36I_2=\begin{pmatrix}36&0\\0&36\end{pmatrix}\Rightarrow A^2-12A+36I_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$.
c) Avem $B\in M$, deoarece $AB=(B^2+B)B=B^3+B^2=B(B+B^2)=BA$, deci $\exists x,y\in\mathbb{R}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$. Rezultă $B^2=\begin{pmatrix}x^2&2xy\\0&x^2\end{pmatrix}$, $B^2+B=\begin{pmatrix}x^2+x&2xy+y\\0&x^2+x\end{pmatrix}$, adică $x^2+x=6$, $2xy+y=4$. Obţinem $x=2$, $y=\frac{4}{5}$ şi $B=\begin{pmatrix}2&4/5\\0&2\end{pmatrix}$, apoi $x=-3$, $y=-\frac{4}{5}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3&-4/5\\0&-3\end{pmatrix}$.
2. *a)* Fie $x,y\in M\Rightarrow\exists p,q\in\mathbb{Q}$ cu $x=\cos p\pi+i\sin p\pi$, $y=\cos q\pi+i\sin q\pi\Rightarrow xy=\cos(p+q)\pi+i\sin(p+q)\pi$. Cum $p+q\in\mathbb{Q}$, rezultă $xy\in M$.
b) Înmulţirea este asociativă, elementul neutru este $1=\cos 0\cdot\pi+i\sin 0\cdot\pi\in M$ (pentru că $0\in\mathbb{Q}$), iar inversul elementului $x\in M$ este $x^{-1}=\frac{1}{x}=\cos p\pi-i\sin p\pi=\cos(-p)\pi+i\sin(-p)\pi\in M$ (pentru că

$p \in \mathbb{Q}$). De aici rezultă cerința.

c) Fie $p, q \in \mathbb{Q}$. Avem de demonstrat că $f(p+q) = f(p) \cdot f(q)$, ceea ce revine la identitatea $\cos(p+q)\pi + i\sin(p+q)\pi = (\cos p\pi + i\sin p\pi)(\cos q\pi + i\sin q\pi)$.

Subiectul III

1. *a)* Evident $x_1 = \frac{9}{2} \ge 4$; $x_{n+1} = (x_n - 4)^2 + 4 \ge 4$, $\forall n \ge 1$, deci $x_n \ge 4$, $\forall n \ge 1$.

b) $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 8x_n + 20 - x_{n-1}^2 + 8x_{n-1} - 20 = (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1} - 8)$, $n \ge 2$. Cum $x_n + x_{n-1} - 8 \ge 0$, rezultă că $x_{n+1} - x_n$ are același semn cu $x_n - x_{n-1}$, deci, inductiv, cu $x_2 - x_1$. Cum $x_2 = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{1}{4} < \frac{9}{2} = x_1$ rezultă $x_{n+1} - x_n \le 0$, $\forall n \ge 1$.

c) Conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent. Notăm $l = \lim_{n\to\infty} a_n$. Trecând la limită obținem $l^2 - 9l + 20 = 0 \Rightarrow l = 4$ sau $l = 5$. Însă $x_n \le x_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow l \le \frac{9}{2} \Rightarrow l = 4$.

2. *a)* Derivata primitivei este $f > 0$, deci primitiva este strict crescătoare, de unde rezultă injectivitatea.

b) Cu schimbarea de variabilă $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$ avem $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \operatorname{arctg}(\sin x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

c) Avem $\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, deci $f(x) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}$. Atunci

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{(\operatorname{tg}x)'}{\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

Testul 33

Subiectul I

1. $x = \frac{6+8+9}{12} = \frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12} \Rightarrow \{x\} = \frac{11}{12}$. **2.** Avem $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4) > 0$, deci $x \in (-4, 3)$.

3. Fie $y \in [3, 4]$. Ecuația $f(x) = y$ se scrie $x = 5 - y$ și are soluție unică în intervalul [1, 2], de unde rezultă cerința.

4. $T_{k+1} = C_9^k (x^{1/2})^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^k = C_9^k x^{\frac{9-3k}{2}}$. Atunci $9 - 3k = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow T_4 = C_9^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$.

5. Avem $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow B, C, D$ coliniare.

6. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin a = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin 2a = 2\sin a\cos a = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, deoarece $\sin a > 0$.

Subiectul II

1. *a)* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5a + 4$. *b)* Avem $1 - 1 = 0$, $a + 2 = 1$, $-1 - 1 = b$, deci $a = -1$, $b = -2$.

c) Dacă $\Delta \ne 0$, sistemul este compatibil determinat, deci este necesar $a = -\frac{4}{5}$. Cum minorul $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ este nenul, rangul matricei sistemului este 2. Impunem ca minorul caracteristic să fie

nul: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 4b + 3 + 2 - b = 3b + 5 \Rightarrow b = -\frac{5}{3}$.

2. *a)* Fie $X, Y \in M \Rightarrow$ există $a, b \in (-1, \infty)$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1+2b & b \\ -2b & 1-b \end{pmatrix}$.

$XY = \begin{pmatrix} 1+2(a+b+ab) & a+b+ab \\ -2(a+b+ab) & 1-2(a+b+ab) \end{pmatrix} \in M$, deoarece $ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1 \in (-1, \infty)$.

b) Notând $U(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, am arătat că $U(a) \cdot U(b) = U(a + b + ab)$, $\forall a, b > -1$. Înmulțirea este asociativă, are elementul neutru $I_2 = U(0) \in M$ (pentru că $0 > -1$), iar inversa matricei $U(a)$ este $U\left(-\frac{a}{1+a}\right) \in M$, deoarece $-\frac{a}{1+a} > -1$.

c) Observăm $f(a) = U(a - 1)$. Funcția este inversabilă, deoarece $U(x) = U(y) \Leftrightarrow x = y$ și $a \in (0, \infty) \Leftrightarrow a - 1 \in (-1, \infty)$. Funcția f este morfism, deoarece $f(ab) = U(ab - 1)$ și $f(a) \cdot f(b) = U(a-1)\,U(b-1) = U(a - 1 + b - 1 + (a-1)(b-1)) = U(ab - 1)$.

Subiectul III

1. *a)* $f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2 - 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ și $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2-x}{x+1} = -1$, deci $y = x - 1$ este asimptota oblică spre $+\infty$. $\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-1}{+0} = -\infty$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală. Funcția este continuă, deci nu mai admite alte asimptote verticale.

c) Cerința revine la rezolvarea ecuației $f'(x) = 2$, $x \in (-1, \infty)$. Avem $x^2 + 2x + 2 = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2. *a)* $A + B = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$. *b)* Cu schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - x$ avem $dt = -dx$ și

$$A = -\int_{\pi/2}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}dt = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t + \sin t}dt = B.$$

c) Din punctele anterioare rezultă $A = \pi/4$.

Testul 34

Subiectul I

1. *a)* Avem $2^{ab} = (2^a)^b = 3^b = 4$, deci $ab = 2$. **2.** Căutam $a, b \in \mathbb{R}$ astfel că $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$. Avem $f(0) = 2 \Rightarrow b = 2$; $f(4) = 4a + b = -4 \Rightarrow 4a = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$. Atunci $f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ și $f(1) = \frac{1}{2}$.

3. $x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **4.** Sunt 9 elemente în produsul cartezian. Verifică perechile (2, 3) și (3, 2). Probabilitatea este 2/9. **5.** Panta dreptei date este $-\frac{1}{3}$. Panta perpendicularei

este 3 şi ecuaţia este $y = 3x$. **6.** $\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{25+64-49}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{1}{2}$, deci $A = 60°$.

Subiectul II

1. ***a)*** $\det C = 1$, $C^{-1} = C^* = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. ***b)*** $AC = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix}14-a & 8-5\\ 21-18 & 12-10\end{pmatrix} = AC$.

c) Pentru $n = 1$ şi din $AC = CB$ obţinem $B = C^{-1}AC$. Atunci $B^n = (C^{-1}AC)^n = C^{-1}AC\cdot C^{-1}AC \ldots C^{-1}AC = C^{-1}AA \ldots AC = C^{-1}A^nC, \forall n \ge 1$.

2. ***a)*** $P = X^2(X^2+3X+3) + X^2 + aX + b = (X^2+1)f + (a-3)X + b - 3$, deci $a = b = 3$.

b) $(x_1 - x_2)^2 + \ldots + (x_3 - x_4)^2 = 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) - 2(x_1x_2 + \ldots + x_3x_4)$ $= 3(x_1 + \ldots + x_4)^2 - 8(x_1x_2 + \ldots + x_3x_4) = 3(-3)^2 - 8\cdot 4 = -5$.

c) Dacă toate rădăcinile ar fi reale, atunci $(x_1+x_2)^2 + \ldots + (x_3-x_4)^2 \ge 0$, contradicţie.

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = e^x + 1 > 0$, deci f este strict crescătoare.

b) Avem $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Din continuitatea funcţiei f rezultă $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă.

c) Din punctul ***a)*** rezultă bijectivitatea funcţiei f, deci f este inversabilă. Avem $(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1$, de unde, pentru că $f(0) = 2$ deducem $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

2. ***a)*** $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$.

b) Notând $t = 1 - x^2$, $dt = -2x\,dx$, avem $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

c) Subgraficul este un sfert din cercul unitate: $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Aria este $\frac{\pi}{4}$.

Testul 35

Subiectul I

1. $a_1 = 8$, $a_{10} = 71 \Rightarrow S_{10} = \frac{8+71}{2}\cdot 10 = 79\cdot 5 = 395$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 7 = 0$. Cum $\Delta = 16 - 4\cdot 3\cdot 7 < 0$, ecuaţia nu are soluţii.

3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $x - \frac{\pi}{2} = -2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Obţinem $x \in \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Avem $C_7^2 = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$; $n^2 - 4n - 21 = 0$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 7$.

5. Punctul O este mijlocul diagonalelor AC şi BD, deci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$, de unde rezultă concluzia.

6. Înălţimea din A este egală cu $\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$, deci $S = 3\sqrt{7}$. Cum $p = 7$, rezultă $r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Subiectul II

1. ***a)*** $\Delta = -3m + 12$.

b) Dacă punctul $P(a, b)$ aparţine tuturor celor 3 drepte, atunci $a\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, deci a treia coloană din Δ este combinaţie liniară a primelor două. Rezultă $\Delta = 0$, deci $m = 4$.

c) Dacă dreptele nu sunt concurente, avem $\Delta \ne 0$, deoarece rang $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ -3 & m\end{pmatrix} = 2$. Sistemul este omogen, compatibil determinat, cu unica soluţie $(0, 0, 0)$.

2. Fie $X, Y \in M \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ astfel ca $X = \begin{pmatrix}a+b\sqrt{2} & b\\ 0 & a-b\sqrt{2}\end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix}c+d\sqrt{2} & d\\ 0 & c-d\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

a) $X + Y = \begin{pmatrix}a+c+(b+d)\sqrt{2} & b+d\\ 0 & a+c-(b+d)\sqrt{2}\end{pmatrix} \in M$, deoarece $a+c, b+d \in \mathbb{Q}$.

b) $XY = \begin{pmatrix}ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2} & ab+bc\\ 0 & ac+2bd-(ad+bc)\sqrt{2}\end{pmatrix} \in M$, pentru că $ac+2bd, ad+bc \in \mathbb{Q}$.

c) Adunarea matricelor este operaţie asociativă şi comutativă, admite elementul neutru $O_2 \in M$ (pentı $a = b = 0 \in \mathbb{Q}$) şi $-X = \begin{pmatrix}-a-b\sqrt{2} & -b\\ 0 & -a+b\sqrt{2}\end{pmatrix} \in M$. Înmulţirea matricelor este operaţie asociativ distributivă faţă de adunare, cu elementul neutru $I_2 \in M$ (pentru $a = 1$, $b = 0$). Cum M este închisă cele două operaţii, rezultă cerinţa.

Subiectul III

1. ***a)*** $f_a'(x) = a^x\ln a - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_a'(0) = \ln a - 1$.

b) Pentru $a > 1$, deoarece $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x} = \infty$, rezultă $\lim_{x\to\infty}(a^x - x - 1) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{a^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$, deci graficul nu are asimptote la $+\infty$. Pentru $a \in (0, 1)$, av $\lim_{x\to\infty}(f(x) + x + 1) = \lim_{x\to\infty} a^x = 0$, deci $y = -x - 1$ este asimptotă spre $+\infty$. Rezultă $a \in (0, 1)$.

c) Deoarece $f_a(x) \ge f_a(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ este punct de minim. Din teorema lui Fermat rez $f_a'(0) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow a = e$.

Notă. Avem $e^x \ge x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. ***a)*** $I_1 = \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi}\sin^n\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)dx \le 0$, deoarece $\sin\frac{x}{2} \ge 0$, $\forall x \in [0, \pi]$ şi $\sin\frac{x}{2} - 1 \le 0$.

c) Avem $\sin^n\frac{x}{2} \ge 0, \forall x \in [0, \pi] \Rightarrow I_n \ge 0$. Fiind descrescător şi mărginit inferior, şirul este converg

Testul 36

Subiectul I

1. $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow A - B = \{5\}$. **2.** Ecuația $f(x) = x$ se scrie $|x-2| = x-4$. Dacă $x \geq 2$, ecuația devine $x - 2 = x - 4$, și nu are soluții. Dacă $x < 2$, ecuația devine $2 - x = x - 4 \Rightarrow x = 3$. Punctul este $A(3, 3)$. **3.** Avem $3^{2x+1} = 3\cdot 9^x \Rightarrow 3^{2x+1} + 9^x = 4\cdot 9^x$. Ecuația se scrie $4 \cdot 9^x = 36 \Leftrightarrow 9^x = 9$, deci $x = 1$.

4. Deoarece $C_{10}^n - C_9^n = C_9^{n-1}$, egalitatea se scrie $C_9^{n-1} = C_9^7 \Rightarrow n-1=7$ sau $n-1=2 \Rightarrow n=8$ sau $n=3$.

5. Punctul $0(0, 0)$ aparține dreptei d_1. Distanța dintre drepte este distanța de la 0 la d_2: $x - y + 1 = 0$, adică $\dfrac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A = 19 \Rightarrow BC = \sqrt{19} \Rightarrow 2R = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$.

Subiectul II

1. ***a)*** $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8I_2$.

b) Deoarece $A^6 = 64I_2$, avem $A^5\cdot\dfrac{1}{64}A = I_2$, deci inversa matricei A^5 este $\dfrac{1}{64}A$.

c) Avem $\det X^2 = \det A = 4$, deci $\det X = \pm 2$. Dacă $\det X = 2$, atunci $X^2 - (\mathrm{Tr}\,X)\cdot X + 2I_2 = 0_2$. Cum $X^2 = A$, rezultă $(\mathrm{Tr}\,X)X = X^2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{Tr}\,X)^2 = 6 \Rightarrow \mathrm{tr}X = \pm\sqrt{6}$ de unde $X = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Dacă $\det X = -2$, atunci $(\mathrm{Tr}\,X)\cdot X = X^2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{Tr}\,X)^2 = -2$, ecuație fără soluții în $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3$.

b) Dacă $\div\, x_1, x_2, x_3$, atunci $2x_2 = x_1 + x_3 \Rightarrow 3x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$. Atunci $f(2) = 0$, deci $8 - 24 + 6 + m = 0 \Rightarrow m = 10$.

c) Avem $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$. Din $6 = x_1(1 + q + q^2)$, $3 = x_1^2q(1+q+q^2)$, rezultă $x_1q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}$. Atunci $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, deci $\dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} + m = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{8}$.

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall x > 0$, deci f este strict crescătoare.

b) $f(1) = 1 > 0$, $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$. Din continuitatea funcției f rezultă cerința.

c) $f(1) + f(2) + ... + f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \ln n!$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$; $n! \leq n^n \Rightarrow 0 \leq \dfrac{\ln n!}{n^2} \leq \dfrac{\ln n}{n}$ și, cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{n^2} = 0$. Limita este egală cu $\dfrac{1}{2}$. (Alternativ, folosiți lema Stolz-Cesaro).

2. ***a)*** $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow \displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = \ln x\Big|_1^4 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^4 = \dfrac{1}{2}(5\ln 2 - \ln 17)$.

b) Notând $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$, avem $\displaystyle\int_1^2 x\,f(x^2)\,dx = \dfrac{1}{2}\int_1^4 f(t)\,dt = \dfrac{1}{4}(5\ln 2 - \ln 17)$.

c) $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \ln t\Big|_1^x - \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^x = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{\ln 2}{2}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Testul 37

Subiectul I

1. $z^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $\bar{z} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z^2 + \bar{z} = 0 \in \mathbb{R}$. **2.** Este necesar și suficient ca $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left[\dfrac{1}{4}, \infty\right)$. **3.** Fie $y \in [1, \infty)$. ecuația $f(x) = y$ are soluția $x = \sqrt[4]{y-1} \in \mathbb{R}$, deci f e surjectivă. **4.** $T_{k+1} = C_{100}^k\sqrt{3}^k \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k$ e par, deci $k \in \{0, 2,..., 100\}$. Sunt 51 de termeni.

5. $4 = \dfrac{1+b}{2} \Rightarrow b = 7$; $a = \dfrac{2+4}{2} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + b = 10$.

6. $\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,\pi/6}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\pi/6} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$.

Subiectul II

1. ***a)*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 3I_3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

b) $A^2 = 3A \Rightarrow A^n = 3^{n-1}A \Rightarrow I_3 + A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1}+1 & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix}$.

$\det(I_3 + A^n) = (3^n+1)\begin{vmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1}+1 & 3^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3^n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3^{n-1} \\ 0 & 1 & 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3^n + 1 \Rightarrow 3^n + 1 = 82 \Rightarrow n = 4$.

c) Căutăm $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $(I_3 + A)(I_3 + xA) = I_3 \Leftrightarrow I_3 + A + xA + xA^2 = I_3 \Leftrightarrow A + xA + 3xA = O_3$, de unde $(4x+1)A = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$. Inversa este $I_3 - \dfrac{1}{4}A$. Alternativ, $(I_3 + A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(I_2 + A)}\cdot(I_3 + A)^*$.

2. ***a)*** Avem $a - 4b = 0$, $5b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{5}, a = \dfrac{4}{5}$, care verifică $-5b = -1$, $a + 4b = \dfrac{8}{5}$ și $a^2 + 9b^2 = 1$, deci matricea aparține lui G.

b) Fie $X, Y \in G \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + 9d^2 = c^2 + 9d^2 = 1$ și $X = \begin{pmatrix} a-4b & 5b \\ -5b & a+4b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c-4d & 5d \\ -5d & c+4d \end{pmatrix}$. Avem $XY = \begin{pmatrix} ac-9bd-4(ad+bc) & 5(ad+bc) \\ -5(ad+bc) & ac-9bd+4(ad+bc) \end{pmatrix} \in G$, deoarece $(ac - 9bd)^2 + 9(ad+bc)^2 = (a^2 + 9b^2)(c^2 + 9d^2) = 1$.

c) Înmulțirea este bine definită pe G, este asociativă, are elementul neutru $I_2 \in G$ (pentru $a = 1$, $b = 0$), iar inversul elementului X este $X^{-1} = \dfrac{1}{a^2+9b^2}\begin{pmatrix} a+4b & -5b \\ 5b & a-4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & -5b \\ 5b & a-4b \end{pmatrix} \in G$.

Subiectul III

1. a) $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0$, deoarece $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\ge -x$.

b) $f'(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x)=\frac{f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1)f''(x)=$

$=f'(x)\sqrt{x^2+1}-x f'(x)=\ f'(x)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{f'(x)}{f(x)}$, de unde rezultă cerința.

c) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=2$, $\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$, deci $y=2x$ este asimptota graficului spre $+\infty$.

2. a) $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=(\ln(x+1)-\ln(x+2))\Big|_0^1=2\ln2-\ln3$.

b) Notăm $t=\ln x$, $dt=\frac{1}{x}dx$. Atunci $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^1 f(t)\,dt=2\ln2-\ln3$.

c) Conform teoremei de medie, există $c_n\in[n,n+1]$ astfel ca $\int_n^{n+1} f(x)\,dx=f(c_n)$.

Din $n\le c_n\le n+1$ rezultă $1\le\frac{c_n}{n}\le 1+\frac{1}{n}$, de unde $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=1$. Ca urmare,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 f(c_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{c_n^2}\cdot\frac{c_n^2}{c_n^2+3c_n+2}=1\cdot1=1.$$

Testul 38

Subiectul I

1. $|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B| \Rightarrow |A\cap B|=4$

2. $x_V=-1=-\frac{a}{2}$, deci $a=2$; $y_V=1-a+b=b-1\Rightarrow b=2$. Atunci $2a+b=6$.

3. $\lg^2 x^2=1\Rightarrow \lg x^2=\pm1$. Rezultă $x^2=10$ sau $x^2=\frac{1}{10}$, de unde $x\in\left\{-\sqrt{10},\sqrt{10},-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

4. Sunt C_5^4 funcţii strict crescătoare şi C_5^4 funcţii strict descrescătoare. În total $2C_5^4=10$.

5. Dreptele d_1 şi d_2 se intersectează în punctul $(-1,-1)$. Atunci $-1-a+1=0\Rightarrow a=0$.

6. $C=180°-30°-75°=75°$ şi $\sin C=\sin75°=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}=2(\sqrt6-\sqrt2)$

Subiectul II

1. a) $XA=\begin{pmatrix}5&3\\1&1\end{pmatrix}=BX$. **b)** Demonstrăm prin inducţie după n. Evident, $B^1=\begin{pmatrix}1&2\cdot1\\0&1\end{pmatrix}$. Din $B^{n+1}=B^n\cdot B=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2(n+1)\\0&1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă cerința.

c) Avem $A=X^{-1}BX\Rightarrow A^{100}=\underbrace{(X^{-1}BX)\dots(X^{-1}BX)}_{\text{de 100 ori}}=X^{-1}B^{100}X$. Din $\det X=2$ şi $X^*=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ obţinem $X^{-1}=\frac12\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$, deci $A^{100}=\frac12\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&200\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix}202&200\\-203&-201\end{pmatrix}$.

2. a) $f=(2X-1)\cdot(X^2-X-1)+4$; câtul este X^2-X-1, iar restul 4.

b) Din $f=2(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ deducem $f(1)=2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$. Pe de altă parte $f(1)=2-3-1+5=3$, deci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=\frac32$.

c) Din $\frac{f'}{f}=\frac{1}{X-x_1}+\frac{1}{X-x_2}+\frac{1}{X-x_3}$ rezultă $\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6-6-1}{3}=-\frac13$.

Subiectul III

1. a) $f'(x)=1+\cos x\ge0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece mulţimea zerourilor funcţiei f' este formată doar din puncte izolate: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, rezultă că funcţia f este strict crescătoare.

b) Avem $x-1\le f(x)\le x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $\lim_{x\to\pm\infty}=\pm\infty$. Funcţia este continuă, deci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, adică f este surjectivă.

c) Cum $\frac{x-1}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{x+1}{x}$, $\forall x>0$, rezultă $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. Funcţia $g(x)=f(x)-x=\sin x$ nu are limită la $+\infty$, deoarece $x_n=n\pi\xrightarrow[n]{}\infty$, $g(x_n)=0\xrightarrow[n]{}0$ şi $y_n=\frac{\pi}{2}+n\pi\xrightarrow[n]{}\infty$, $g(y_n)=1\xrightarrow[n]{}1$. Rezultă că f nu are asimptote către $+\infty$. Analog, se arată că f nu are asimptote către $-\infty$. Din continuitate rezultă că f nu are asimptote verticale.

2. a) $I_2=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin2x}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=2\sin x\Big|_0^{\pi/2}=2$.

b) Cum $\sin(n+2)x-\sin nx=2\sin\frac{2x}{2}\cos\frac{2n+2}{2}x$, rezultă $I_{n+2}-I_n=2\int_0^{\pi/2}\cos(n+1)x\,dx=$

$=\frac{2}{n+1}\sin(n+1)x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$.

c) Dacă n e impar, atunci $\frac{n+1}{2}\in\mathbb{Z}$ şi $\sin\frac{(n+1)\pi}{2}=0$. Deducem că $I_1=I_3=\dots=I_{2013}=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$.

Testul 39

Subiectul I

1. De exemplu $x=-\sqrt2+1$, deoarece $\sqrt2+x=1\in\mathbb{Q}^*$.

2. Funcţia f este crescătoare pe intervalul $\left[x_V=-\frac{m}{4},+\infty\right)$. Trebuie ca $-\frac{m}{4}\le2$, deci $m\ge-8$.

3. $\frac{\pi}{4}=\arcsin\frac{\sqrt2}{2}$. Funcţia $\arcsin:[-1,1]\to\mathbb{R}$ este crescătoare, deci $x\in\left[-1,\frac{\sqrt2}{2}\right]$.

4. $5!=120$ şi $6!=720$; rezultă $n\in\{1,2,3,4,5\}$.

5. Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{3-1}{2},\frac{1+4}{2}\right)=M\left(1,\frac52\right)$. Mediana din A are lungimea $AM=\sqrt{(1-1)^2+\left(2-\frac52\right)^2}=\frac12$.

6. Avem $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, deci punctul de coordonată 4 pe cercul trigonometric este situat în al treilea cadran. Rezultă $\sin 4 < 0$.

Subiectul II

1. *a)* $\det A = 0$ şi $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci rang$A = 2$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix}4 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Din $A^3 = uA^2 + vA$ obţinem $4 = 2u + v$, $1 = u + v$, de unde $u = 3$, $v = -2$.

c) $X = A^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, căci adjuncta matricei A verifică relaţia $A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A)\cdot I_3 = O_3$.

2. *a)* $X - 1$ divide $f \Leftrightarrow f(1) = 0$. Deoarece $f(1) = 4 + m$ obţinem $m = -4$.

b) Cum 1 este rădăcină, avem $f = (X-1)(X^2 - 5X + 4)$. Obţinem $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 4$.

c) Dacă r este rădăcină dublă, atunci $f(r) = f'(r) = 0$. Din $f'(r) = 3r^2 - 12r + 9 = 3(r-1)(r-3)$ se obţine $r = 1$, pentru care $m = -4$, sau $r = 3$, pentru care din $f(3) = 0$, rezultă $m = 0$. Aşadar, $m \in \{0, -4\}$.

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$, deci f nu este derivabilă (la dreapta) în $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} = +\infty$, deci f nu este derivabilă în $x = -1$.

b) $f'(x) = \frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}} = \frac{(x-1)(3x+1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}} = \frac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

c) Derivata se anulează în $x = -1/3$ şi are semnul trinomului $3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$. După cum se vede şi din tabloul de variaţie, punctul $x = 1/3$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local, deoarece f este continuă.

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	|	$+++$	0	$---$	|	$++++$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2. *a)* $I(3,3) = \int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$.

b) Cu substituţia $t = 1 - x$, avem $I(p,q) = -\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt = I(q,p)$.

c) Integrând prin părţi, avem $I(p,q) = \frac{x^p}{p}\cdot(1-x)^{q-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^p}{p}(q-1)(1-x)^{q-2}(-1)\,dx = 0 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx = \frac{q-1}{p} I(p+1, q-1)$, de unde rezultă cerinţa.

Testul 40

Subiectul I

1. Intersecţia este vidă dacă şi numai dacă $a + 1 \le 0$ sau $a \ge 1$. Rezultă $a \in (-1, 1)$.

2. Căutăm $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, astfel încât $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$.
Avem $f(0) = c \Rightarrow c = 0$, $f(1) = a + b + c \Rightarrow a + b = 1$ şi $f(x) = 4a + 2b + c \Rightarrow 2a + b = 4$. Obţinem $a = 3$, $b = -2$, $c = 0$ şi $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Avem $2\sin x\cos x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 0$ sau $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \cos x = 0$ sau $\text{tg}x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $T_{k+1} = C_6^k (x^3)^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_6^k \cdot x^{18-4k}$. Din $18 - 4k = 2$ rezultă $k = 4$; coeficientul lui x^2 este $C_6^4 = 15$.

5. $\overline{AB} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$, $AB = 2\sqrt{2}$; $\overline{AC} = -2\bar{i} + 3\bar{j}$, $AC = \sqrt{13}$. Avem $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -4 + 6 = 2$; pe de altă parte, $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\widehat{BAC}$. Rezultă $\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

6. Avem $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, deci $\cos 2 < 0$, $\cos 4 < 0$ şi $\cos 2 \cdot \cos 4 > 0$.

Subiectul II

1. *a)* Avem $\det A = -1$, $A^* = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, deci $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

b) Pentru $n = 2$, egalitatea este evidentă. Pentru $n = 3$, arătăm că $A^3 - A = A^2 - I_3$. Într-adevăr, $A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3$. Dacă pentru un $n \ge 2$ avem $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3$, prin înmulţire cu A rezultă $A^{n+1} - A^{n-1} = A^3 - A = A^2 - I_3$, ceea ce probează cerinţa.

c) Avem $A^{100} - A^{98} = A^2 - I_3$, $A^{98} - A^{96} = A^2 - I_3$, ..., $A^2 - I_3 = A^2 - I_3$. Adunând cele 50 de egalităţi obţinem $A^{100} - I_3 = 50(A^2 - I_3)$, de unde $A^{100} = 50A^2 - 49I_3 = \begin{pmatrix}1 & 50 & 50\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Fie $X, Y \in M \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}c & 3d\\ d & c\end{pmatrix}$.

a) $X - Y = \begin{pmatrix}a-c & 3(b-d)\\ b-d & 3(a-c)\end{pmatrix} \in M$, deoarece $a - c, b - d \in \mathbb{Q}$.

b) $XY = \begin{pmatrix}ac+3bd & 3(bc+ad)\\ bc+ad & ac+3bd\end{pmatrix} \in M$, deoarece $ac + 3bd, bc + ad \in \mathbb{Q}$.

c) Din punctul a) rezultă că $(M, +)$ e subgrup al grupului aditiv $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Înmulţirea este bine definită pe M, conform punctului *b)*. În plus, este asociativă, distributivă faţă de adunare şi admite elementul neutru $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in M$, pentru $a = 1$, $b = 0$. Inversa matricei X este $X^{-1} = \frac{1}{a^2 - 3b^2}\begin{pmatrix}a & -3b\\ -b & a\end{pmatrix}$ care aparţine lui M deoarece $\frac{a}{a^2-3b^2}, \frac{-b}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Q}$; a se ţine cont că $a, b \in \mathbb{Q}$ implică $a^2 - 3b^2 \neq 0$, deoarece $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Cerinţa este demonstrată.

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4-12x^2+1}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^2+1}{\sqrt{x^4-12x^2+1}+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-12}{2}=-6$.

b) $f'(x)=4(x^3-6x), x\in\mathbb{R}$. Din tabloul de variație, $-\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}$ sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - -$		0	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$	$\searrow$		-35	$\nearrow$	1	$\searrow$	-35	$\nearrow$	

c) $f''(x)=4(3x^2-6)=12(x^2-2)=12(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Derivata a doua se anulează în $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ și schimbă semnul în jurul acestor puncte, deci sunt puncte de inflexiune ale funcției *f*.

2. *a)* $\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\frac{f^2(1)-f^2(0)}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

b) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1(x^2+1)\,dx=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^1=\frac{4}{3}\pi$.

c) Aria este $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x'f(x)\,dx=x\cdot\sqrt{x+1}\,\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=$

$=\sqrt{2}-S+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1$, deci $S=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.